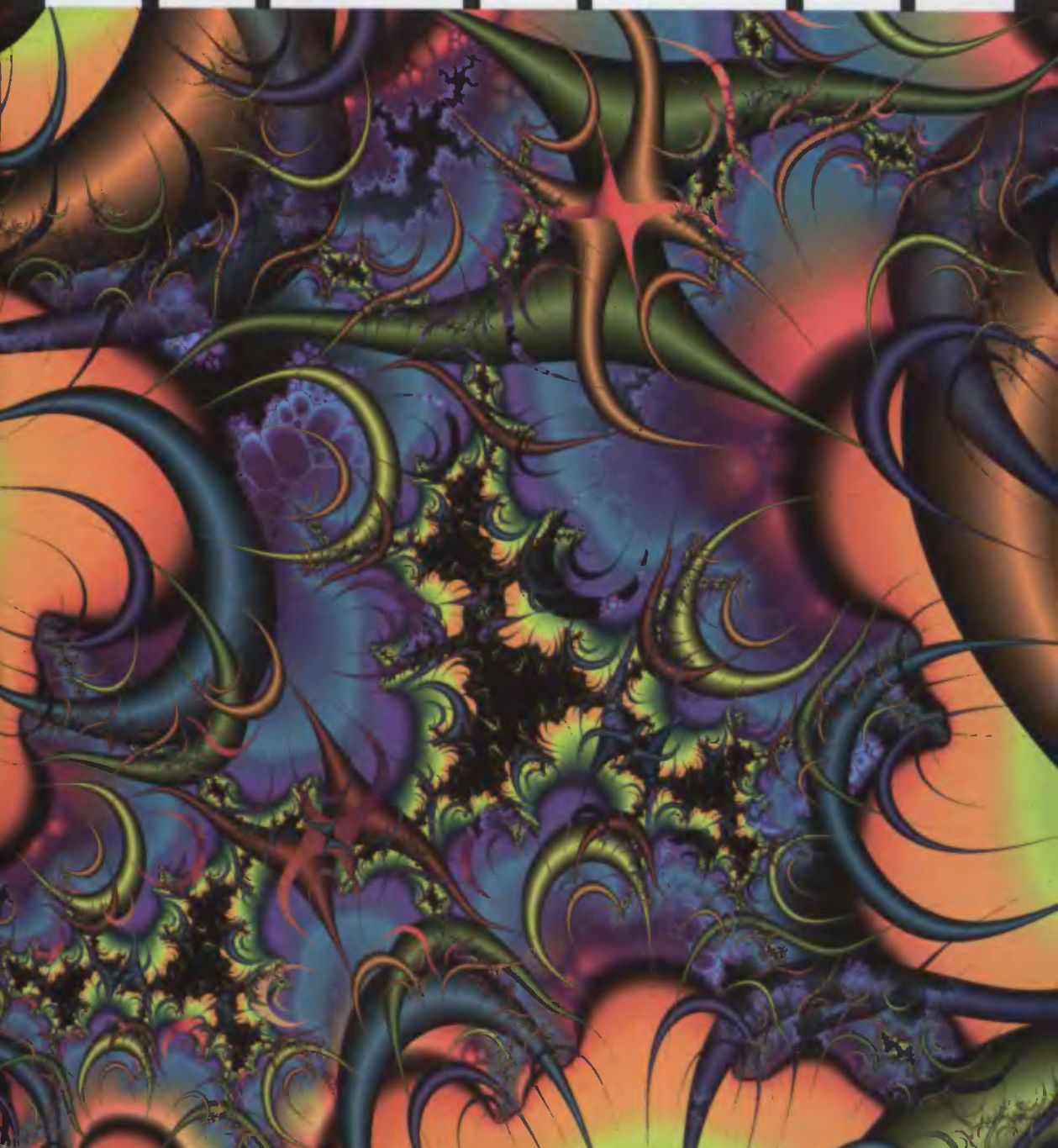
kwartalnik nr 3 (4) lipiec 2003 ISSN 1643-9481 indeks 372366 cena 5 zł (0% VAT)

# mmm

magazyn miłośników matematyki



# Matematyk na wakacjach

*Pewnego razu matematyk przepływał przez rzekę w towarzystwie przewoźnika. Podstępnie wypytywał go, czy coś wie o matematyce, filozofii i astronomii. Zniecierpliwiony przewoźnik odpowiedział, że nic nie wie o tych naukach, uczony zaś stale podkreślał, że na zgłębianiu tych nauk spędził trzy czwarte swojego życia.*
*W pewnym momencie łódka zawadziła o przeszkodę i wywróciła się.*
*– Umiecie pływać?! – krzyknął przewoźnik do uczonego.*
*– Nie umiem! – wołał przestraszony matematyk.*
*– To trzymajcie się moich pleców, bo stracicie naraz wszystkie cztery czwarte swego życia!*

*Dwoje ludzi podróżowało balonem. Nagle podniosła się mgła i stracili orientację w terenie. Gdy mgła się rozwiała stwierdzili, że znajdują się na pustkowiu. Na szczęście w oddali ujrzeli mężczyznę. Jeden z podróżników zawołał:*
*– Przepraszam, czy mógłby nam pan powiedzieć, gdzie jesteśmy?*
*Mężczyzna pomyślał przez chwilę i krzyknął: – W balonie!*
*Wtedy niespodziewany podmuch wiatru porwał balon. Podróżnik stwierdził: – Patrz, co za pech! Na takim pustkowiu jeden człowiek i to akurat musiał być matematyk.*
*– Skąd wiesz, że to był matematyk? – zdziwił się jego towarzysz.*
*– Jak to skąd? Udzielił nam odpowiedzi przemyślanej, w 100% prawdziwej i całkowicie bezużytecznej.*

*Matematyk z żoną opuszcza hotel. Stoją z bagażami na ulicy. Żona mu nie ufa, gdyż jest wielce roztargniony, więc mówi: „Poczekaj tu i przypilnuj bagaży, a ja zamówię taksówkę". Zostawiła go mruczącego coś pod nosem. Gdy wróciła po kilku minutach, mąż powiedział: „Wydawało mi się, że mówiłaś, że mamy 10 walizek, a ja policzyłem tylko do dziewięciu.".*
*– Ależ nie – mówi żona – Przecież jest 10.*
*– Nie, policz je sama: zero, jeden, dwa, trzy, ..."*

## W numerze 3/2003:

*Drodzy Czytelnicy!*

*Dziękujemy za opinie dotyczące MMM oraz przebiegu Mistrzostw Polski w GMiL. Niektóre z nich przytaczamy w „Forum Czytelników". Aby zachęcić Was do wymiany poglądów, wkrótce uruchomimy forum na naszej stronie www.*

*Buszowanie po internetowej dżungli może utrudnić Wam, przegląd polecanych przez nas stron www. Znajdziecie na nich konkursy matematyczne, łamigłówki logiczne i ciekawostki naukowe. Prosimy o nadsyłanie swoich ulubionych adresów.*

*W bieżącym numerze pojawiają się jeszcze inne nowości, m.in. dział poświęcony jednej z trudniejszych (i przyznajmy, mało lubianych w szkole) dziedzin matematyki – geometrii. Nazwaliśmy go „Etiudy geometryczne", gdyż mamy nadzieję, że te krótkie artykuły staną się zachętą do szerszego jej studiowania.*

*Na Waszą prośbę odpowiedzi do zadań do samodzielnego rozwiązania (z wyjątkiem konkursowych) będziemy zamieszczać w bieżącym numerze. Zgadzamy się, że trzy miesiące oczekiwania na możliwość sprawdzenia swoich rozwiązań to zbyt długo.*

*Na wakacyjne miesiące proponujemy kolejną porcję łamigłówek (w tym zadania z finałów I Mistrzostw Polski w GMiL). Zapraszamy też do rodzinnych potyczek w „5–10–15–20".*

*Czytelników nadsyłających rozwiązania prosimy o podawanie szkoły lub wieku. Pomoże nam to we właściwym doborze nagród książkowych.*

*Nawet jeśli wakacyjna pogoda (odpukać) nie dopisze, z MMM nie będziecie się nudzić.*

*Życzymy udanego i słonecznego wypoczynku.*
*Redakcja*


**Matematyczne zmagania**
Paryż zaprasza mistrzów ..... 2
*Dorota Kolany*
Nudna matematyka? ..... 8
Sztafeta pokoleń, czyli 5 –10 –15 – 20 .. 9

**Etiudy geometryczne**
*Witold Bednarek*
Czworokąt z klasą ..... 10
*Małgorzata Mikołajczyk*
Osiołek na pastwisku ..... 11
*Stanisław Fudali*
Odbijany ..... 13

**Samouczek zadaniowy**
*Lech Stawikowski*
Kolorowe szachownice ..... 15
*Jerzy Janowicz*
Rozmaitości z rozwiązaniami ..... 18
*Lech Stawikowski*
Trzynasta moneta ..... 22

**Z życia liczb**
*Waldemar Górski*
Pierwsze? Absolutnie! ..... 24

**Zrób sobie bryłkę**
*Piotr Pawlikowski*
Krewni stelli ..... 26

**Między nami, szperaczami**
*Wojciech Głodek*
Wyłowione z sieci ..... 29
Forum Czytelników ..... 30

**Łamanie głowy, czyli burza w mózgu**
Zadania konkursowe ..... 31
Wyniki i podpowiedzi ..... 33



**mmm Magazyn Miłośników Matematyki** ISSN 1643-9481, NAKŁAD 5000 egz.

WYDAWCA Oficyna Wydawnicza ATUT Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

**RADA REDAKCYJNA**
Rościsław Rabczuk
Zbigniew Romanowicz
Sławomir Suchanowski

**REDAKTOR ODPOWIEDZIALNY**
Małgorzata Mikołajczyk

**PROJEKT OKŁADKI**
Adam Łowczycki

**MENEDŻER TYTUŁU**
Krzysztof Skwark

**ADRES REDAKCJI**
Magazyn Miłośników Matematyki
Podwale 62
50-010 Wrocław,
tel. (0-71) 342 20 56
e-mail: mmm@atut.ig.pl

**SKŁAD I ŁAMANIE**
Sigma – Ewa Karolczak
53-149 Wrocław, ul. Racławicka 11/6
tel. (0-71) 361 27 41

**WARUNKI PRENUMERATY**
Koszt prenumeraty równa się liczbie zamawianych numerów pisma pomnożonej przez cenę pojedynczego numeru (5 zł). Każda wpłata powinna mieć adnotację, których numerów dotyczy, oraz zawierać adres zamawiającego. Można zamawiać również numery archiwalne.

**Należność prosimy wpłacać na konto:**
Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
BZ WBK I O/Wrocław
**24 1090 2398 0000 0006 0802 5123**

**CENNIK REKLAM**
Okładka (pełny kolor):
II strona – 3000 zł, III strona – 2000 zł;
wnętrze (2 kolory):
1 strona – 1000 zł, 1/2 strony – 600 zł, 1/3 strony – 400 zł.

Podane kwoty są cenami netto, należy doliczyć 22% VAT.

Przy zamówieniu reklamy dwukrotnej udzielamy 10% rabatu, przy trzykrotnej – 15%.

Redakcja nie odpowiada za treść reklam i ogłoszeń.

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadsyłanych tekstów. Niezamówionych materiałów nie zwracamy.

**Zapraszamy do współpracy!**
**Redakcja**

# Matematyczne zmagania

# Paryż zaprasza mistrzów

*W kwietniu 2003 r. zakończył się II etap korespondencyjny eliminacji do I Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych (będących też eliminacjami do XVII Mistrzostw Międzynarodowych). Z 2998 uczestników zakwalifikowanych do tego (płatnego!) etapu 1132 przysłało rozwiązania zadań konkursowych. Do półfinałów krajowych weszło 787 osób. Zawody półfinałowe odbyły się 17 maja we Wrocławiu. Przystąpiło do nich 675 zawodników. Następnego dnia rozegrany został finał krajowy. Poniższa tabela ilustruje przebieg tych zmagań.*

*Więcej informacji można znaleźć na stronie internetowej* ***http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html***

| kategoria | półfinał | | finał |
|---|---|---|---|
| | zakwalifikowano | przystąpiło | |
| CE (kl. III SP) | 41 | 27 | 13 |
| CM (kl. IV SP) | 72 | 59 | 32 |
| C1 (kl. V i VI SP) | 143 | 122 | 40 |
| C2 (gimnazja) | 326 | 279 | 139 |
| L1 (szkoły średnie) | 138 | 125 | 42 |
| L2 (studenci i szkoły pomaturalne) | 17 | 14 | 9 |
| HC (zawodowi matematycy i informatycy) | 26 | 25 | 8 |
| GP (dorośli – amatorzy) | 24 | 24 | 13 |

Puchary dla zwycięzców w poszczególnych kategoriach ufundowali: prezydent RP Aleksander Kwaśniewski (kat. C2), premier RP Leszek Miller (kat. L1), marszałek Sejmu RP Marek Borowski (kat. L2, GP, HC), minister edukacji narodowej i sportu Krystyna Łybacka (kat. CE) oraz wojewoda dolnośląski Stanisław Łopatowski (kat. C1) i prezydent miasta Wrocławia Rafał Dutkiewicz (kat. CM). Zwycięzcy otrzymali tytuły Mistrza Polski w Grach Matematycznych i Logicznych w poszczególnych kategoriach i będą reprezentowali nasz kraj na XVII Międzynarodowych Mistrzostwach w GMiL w Paryżu w sierpniu 2003. Trzymamy kciuki i życzymy sukcesów. Na sąsiednich stronach przedstawiamy całą ósemkę Mistrzów.

**Kategoria CE – Maciej Pawlikowski**
**klasa IIIb SP nr 1 w Kluczborku**

Zwycięstwo w finale zafundował sobie na 10 urodziny. Pokonał tatę, który w kategorii HC był dopiero (?!) czwarty. Bardzo lubi rozwiązywać zadania logiczne i łamigłówki. Jest pasjonatem origami i układania puzzli. Gra w szachy. Dużo czyta. Jego ulubieni bohaterowie to Harry Potter i Pan Samochodzik. Jest laureatem konkursu Kangur. Bardzo cieszy się z wygranej w mistrzostwach w GMiL i z perspektywy wyjazdu do Francji. Ma nadzieję, że również tam uda mu się dobrze zaprezentować. Obiecuje trenować (chociaż troszkę) w czasie wakacji.

**Kategoria CM – Paweł Lipski**
**klasa IVc SP nr 41 w Gliwicach**

Ze wszystkich przedmiotów szkolnych najbardziej lubi matematykę, ale pasjonuje się też przyrodą (świetnie zna się na drzewach i krzewach). Jego hobby to tworzenie stron internetowych. Jest trzykrotnym laureatem konkursu Kangur (startował w nim już w II klasie) i tegorocznym zdobywcą nagrody głównej. W ubiegłym roku zajął III miejsce w konkursie GMiL w kategorii CE. Opiekunem jego konkursowych poczynań jest pani Barbara Podlewska-Jemielity. Mimo młodego wieku jest stałym czytelnikiem MMM.

**Kategoria C1 – Jakub Oćwieja**
**klasa VIc SP nr 10 w Czechowicach-Dziedzicach**

Nie są to jego pierwsze matematyczne laury. Jest czterokrotnym laureatem Kangura oraz tegorocznym laureatem ogólnopolskiego konkursu MAT. Rada Miejska w Czechowicach-Dziedzicach przyznała mu stypendium dla wybitnie uzdolnionej młodzieży. Od najmłodszych lat jest pasjonatem krzyżówek, rebusów i zagadek. Matematykę traktuje jak hobby. Uczestniczy w zajęciach Pracowni Matematyki w Pałacu Młodzieży w Katowicach. Lubi jazdę na rowerze, trenuje koszykówkę (jego drużyna zdobyła w tym roku brązowy medal na szczeblu powiatu). Jest koleżeński i dowcipny. Chętnie pomaga kolegom.

**Kategoria C2 – Michał Pilipczuk**
**klasa III 20 Społecznego Gimnazjum Ogólnokształcącego w Warszawie**

Matematyką interesuje się od dzieciństwa, ale dopiero od kilku lat próbuje sił w różnych konkursach matematycznych i w Olimpiadzie Matematycznej. Pasjonuje się też informatyką i fizyką. Wolny czas poświęca na czytanie i spotkania z przyjaciółmi. Aktywnie działa w harcerstwie. Jest stypendystą Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci. Często wyjeżdża na obozy naukowe, gdzie może rozwijać swoje zainteresowania. We wrześniu planuje rozpocząć naukę w XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Michał Miodek (pierwszy z lewej)

**Kategoria L1 – Michał Miodek**
**z Zawiercia, klasa IV Zespołu Szkół Elektronicznych w Sosnowcu**

Do szkoły dojeżdża 35 km. Uczy się na kierunku „systemy komputerowe", stąd jego informatyczne zainteresowania – programowanie, sieci komputerowe, tworzenia stron www. Planuje podjąć studia informatyczne w Warszawie. Na swoim koncie ma wiele sukcesów: był laureatem Olimpiady Wiedzy Technicznej, Konkursu Internetowego Politechniki Warszawskiej, Konkursu Wiedzy Technicznej organizowanego przez Uniwersytet Śląski, finalistą Olimpiady Elektrycznej i Elektronicznej oraz LII Olimpiady Matematycznej. Od pięciu lat zbiera tytuły laureata w konkursie Kangur. W wolnych chwilach lubi poszaleć z przyjaciółmi i marzy o psie, którego brak kompensuje mu hodowla rybek akwariowych.

**Kategoria L2 – Jacek Jurewicz**
**z Olsztyna, student II roku wydziału MiM UW w Warszawie**

W listopadzie skończy 20 lat. Studiuje na II roku Jednoczesnych Studiów Informatyczno-Matematycznych na Wydziale Matematyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Był to jego szósty udział w Mistrzostwach, ale po raz pierwszy zwieńczony wyjazdem do Paryża. Poza matematyką i informatyką interesuje się wieloma innymi dziedzinami nauki. Najbardziej jednak nurtują go zagadnienia sztucznej inteligencji. Należy do stowarzyszenia Mensa Polska.

**Kategoria GP – Ryszard Luks**
**inż. elektryk z Siemianowic**

Pochodzi z Chrzanowa, ma 45 lat, ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej. Przez 20 lat pracował w Kopalni Węgla Kamiennego „Siemianowice". W Mistrzostwach w GMiL startował dziesięciokrotnie, z czego 7 razy znalazł się w finale krajowym i 2 razy w finale paryskim. Matematyka fascynowała go od dawna. Lubi zadania związane z teorią liczb oraz z teorią gier. Nieźle radzi sobie z elementarną algebrą i geometrią. Więcej kłopotu sprawiają mu zadania związane z trygonometrią i geometrią analityczną. Interesuje się także historią matematyki, matematyką eksperymentalną i heurystyką.

**Kategoria HC – Adam Smólski**
**nauczyciel z Komorowa**

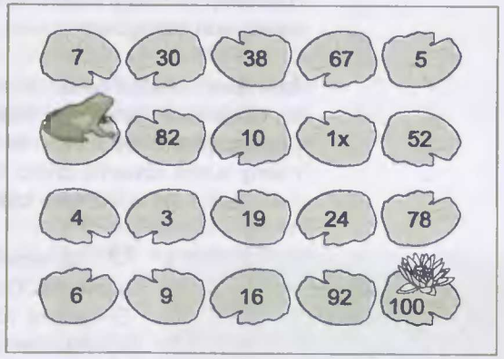
Ma 48 lat. Uczy matematyki i fizyki w szkole o nazwie zapewne najdłuższej w Polsce: I Społecznym Gimnazjum i Liceum Ogólnokształcącym im. Maharadży Jam Saheba Digvijay Sinhji w Warszawie (krócej „Bednarska"). W przerwach między lekcjami redaguje czasopismo dla nauczycieli „Fizyka w Szkole" i organizuje konkurs fizyczny Lwiątko*. W przerwach między przerwami słucha muzyki i chodzi po górach. Pozostały czas poświęca rodzinie, dwóm psom i kotu.

* To odmiana Kangura. Pomysł narodził się we Lwowie. Polska była drugim po Ukrainie krajem, który do tego konkursu przystąpił. W tym roku zawody odbyły się próbnie w 10 szkołach, w przyszłym roku – już w całej Polsce. Informacji można szukać w czasopiśmie „Fizyka w Szkole" i na stronie internetowej slo.bednarska.edu.pl/lwiatko



Poniżej prezentujemy kilka zadań, z jakimi zmagali się uczestnicy półfinałów i finałów krajowych (odpowiedzi w następnym numerze).

## Półfinał krajowy




**1.** Żabka siedzi na jednym z nenufarów (patrz rysunek) i kolejnymi skokami z nenufaru na nenufar sąsiedni zamierza osiągnąć nenufar z kwiatem. Może wykonywać skoki tylko wzdłuż linii pionowych lub poziomych. Wykonuje skok ↑ lub ↓, jeśli po tym skoku chce znaleźć się na nenufarze o numerze parzystym, albo wykonuje skok ← lub →, jeśli po tym skoku chce znaleźć się na nenufarze o numerze nieparzystym. **Zaznacz strzałkami najkrótszą drogę żabki, po której dotrze ona do nenufaru z kwiatem.**

**2.** Dwa jednakowe akwaria napełnione wodą ważą razem 72 kilogramy, a jedno takie akwarium napełnione wodą do połowy waży 20 kilogramów. **Ile kilogramów waży jedno puste akwarium?**

**3.** Liczba 145541 jest palindromem, ponieważ czyta się ją tak samo z lewa na prawo jak i z prawa na lewo. Ponadto ma ona pewną szczególną własność – wybrane z niej kolejne liczby dwucyfrowe 14, 45, 55, 54 i 41 są wszystkie różne. **Znaleźć największą liczbę będącą palindromem, w której występują tylko trzy cyfry 1, 2, 3 i która ma również tę szczególną własność.**

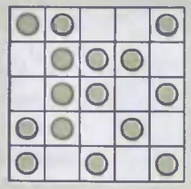
**4.** W rachunku małego Jasia, wykonanym na siedmiu siódemkach, zostały usunięte znaki dodawania +, znaki mnożenia ×, a także nawiasy ( ).

7 7 7 7 7 7 7 = 707

**Wstaw je ponownie na właściwych miejscach, aby otrzymana równość była prawdziwa.**

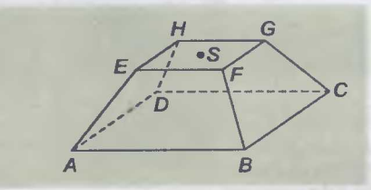
**5.** W grupie 5 dziewcząt niektóre są przyjaciółkami, a inne nie. Każda z dziewcząt ma w tej grupie 2 albo 3 przyjaciółki, a gdy dwie dziewczynki przyjaźnią się, to nie mają nigdy tej samej liczby przyjaciółek w tej grupie. Ela ma w grupie 3 przyjaciółki. Amelia przyjaźni się z Kasią. Beata jest również przyjaciółką Kasi. **Podaj imiona przyjaciółek Dominiki.**

**6.** Na polach planszy 5 × 5 ustawiono 15 pionków. Jaką najmniejszą liczbę pionków trzeba przestawić na inne wolne pola planszy, aby po tej operacji na każdej linii poziomej i pionowej, a także na każdej z dwóch przekątnych znajdowały się 3 pionki. **W odpowiedzi zaczernić przestawiane pionki i strzałkami zaznaczyć ich ruchy na nowe pozycje.**



7. Na płaszczyźnie narysowano cztery okręgi o takim samym promieniu. Żadne dwa nie były styczne, a wszystkie cztery okręgi utworzyły figurę spójną, co oznacza, że z dowolnego punktu tej figury można przemieścić się do każdego innego jej punktu poruszając się po łukach okręgów tworzących tę figurę. **Jaka może być najmniejsza liczba punktów, w których przecinają się co najmniej dwa z narysowanych okręgów?**

8. Marek i Radek podzielili między siebie całą zawartość torby z cukierkami. Liczba cukierków Marka była liczbą parzystą, zaś Radka liczbą nieparzystą. Iloczyn piątej części liczby cukierków Marka i czwartej części liczby cukierków Radka był równy sumie czwartej części liczby cukierków Marka i piątej części liczby cukierków Radka. **Ile cukierków było w torbie przed podziałem?**

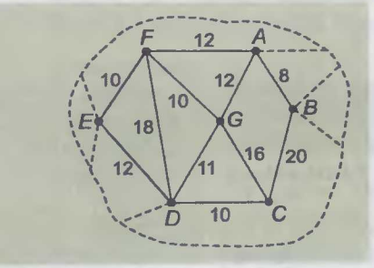



9. Na stole leży tekturowe, zamknięte pudełko, w którym podstawa *ABCD* jest kwadratem o boku równym 12 cm, górna ściana *EFGH* jest równoległa do podstawy i też jest kwadratem, ale o boku równym 6 cm. Każda z krawędzi bocznych ma długość 6 cm. W środek *S* górnej ściany pudełka wbijamy ostrze cyrkla, a drugie ramię cyrkla ustawiamy tak, aby grafit znalazł się w wierzchołku *E* tej ściany. Cyrklem o takiej rozwartości kreślimy krzywą zamkniętą utworzoną z czterech łuków leżących na ścianach bocznych pudełka. **Podać dokładną długość tej krzywej w centymetrach.**

## Finał krajowy

1. W dniu dzisiejszym (tj. 18 maja 2003) małpka i jej matka obchodzą swoje urodziny. W tym dniu łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat, a ponadto wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy małpka będzie miała obecny wiek swojej matki. **Które urodziny obchodzi dziś małpka?**

2. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która dzieli się przez 13, która ma sumę cyfr równą 13 i w której dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę dwucyfrową 13.




3. Szkic planu pewnego fragmentu miasta pokazany na rysunku obejmuje 7 skrzyżowań: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* i *G* oraz 11 odcinków ulic. Strażnik miejski patroluje ulice tej części miasta rozpoczynając obchód od skrzyżowania *A*, ma obowiązek przejść każdą ulicę co najmniej jeden raz i powrócić do skrzyżowania *A*. Przy każdym odcinku znajduje się liczba określająca czas w minutach potrzebny do przejścia tego odcinka. Strażnik zna dobrze miasto i wybiera trasę tak, aby łączny czas obchodu był najkrótszy. **Jaki jest najkrótszy czas obchodu?**

4. W koszu jest 16 owoców. Są tam jabłka, gruszki i pomarańcze. Pomarańcz jest co najmniej tyle ile jabłek, a jabłek jest więcej niż gruszek. Jeżeli z tego kosza wybierzemy losowo 9 owoców, to wśród owoców wybranych zawsze będą owoce co najmniej dwóch rodzajów. Gdybyśmy zaś zamiast 9 wybrali 14 owoców, to wśród owoców wybranych zawsze będą owoce wszystkich trzech rodzajów. **Ile pomarańcz, ile jabłek, a ile gruszek mogło być w tym koszu?** Jeżeli jest więcej niż jedno rozwiązanie, podać liczbę rozwiązań oraz to rozwiązanie, w którym liczba pomarańcz jest największa.



5. Agata ma całe pudło kartoników z cyframi 1, 2 i 3. Układa z nich liczby wielocyfrowe o następującej własności: wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone z kolejnych dwóch cyfr takiej liczby są różne. Ułożyła m.in. liczbę 231 121, w której liczby dwucyfrowe 23, 31, 11, 12 i 21 są rzeczywiście różne. **Ile cyfr miała największa liczba, którą mogła ułożyć Agata?** W odpowiedzi podać również 5 ostatnich cyfr tej największej liczby wypisując je w tej samej kolejności, w jakiej występują one w liczbie Agaty.

6. Znaleźć trzy kolejne liczby całkowite dodatnie, z których najmniejsza ma sumę cyfr podzielną przez 5, średnia ma sumę cyfr podzielną przez 4, a największa ma sumę cyfr podzielną przez 3.

7. Ania napisała ułamek nieskracalny $\frac{10}{97}$. Może zmieniać zapis lub wartość tego ułamka stosując w odpowiedniej kolejności następujące operacje:

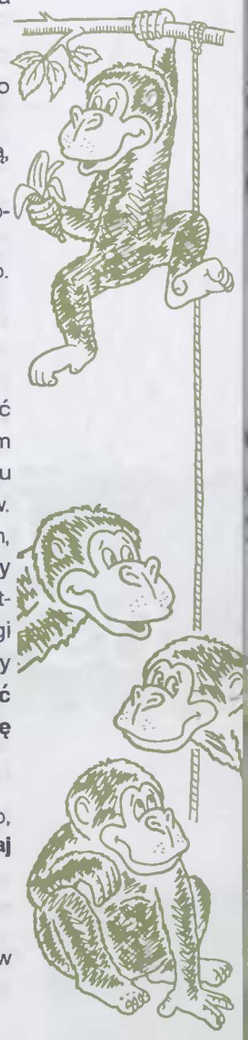
1) może do licznika i mianownika dodać równocześnie dowolną, ale taką samą, liczbę całkowitą dodatnią,

2) może licznik i mianownik pomnożyć przez dowolną, ale taką samą, liczbę całkowitą dodatnią,

3) może uprościć otrzymany ułamek doprowadzając go do ułamka nieskracalnego.

**Jaką najmniejszą liczbą tego typu operacji można ułamek $\frac{10}{97}$ zamienić na:**

**a) ułamek $\frac{1}{4}$, b) ułamek $\frac{1}{3}$?**



8. Na haku u sufitu, na wysokości 3 metrów zaczepiona jest lina, której długość po obu stronach haka jest taka sama. 1 metr liny waży 300 gramów. Na jednym końcu liny zaczepiła się małpka, która trzyma w łapce banana, a na drugim końcu liny zaczepiono przeciwwagę równą wadze małpki. 1 cm banana waży 10 gramów. Całkowita długość liny w metrach stanowi $\frac{1}{3}$ wieku małpki wyrażonego w latach, a waga małpki w gramach jest równa 200-krotnej liczbie lat matki tej małpki. Łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat. Dodając dwukrotność wagi małpki i 40-krotność wagi banana otrzymuje się ten sam rezultat, co przy dodaniu 10-krotnej wagi liny oraz wagi użytej przeciwwagi. Wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy ona będzie miała obecny wiek swojej matki. **Podać w centymetrach długość banana i z warunków równowagi wyznaczyć różnicę długości odcinków liny po obu stronach haka.** (Zaniedbujemy grubość haka.)

9. Prostokąt o bokach 25 cm i 12 cm podzielono na trzy trójkąty w taki sposób, że długości boków każdego z nich są całkowitymi liczbami centymetrów. **Podaj obwody tych trzech trójkątów.**

Uwaga!
W następnym numerze opublikujemy zadania eliminacyjne kolejnych Mistrzostw Polski w GMiL.

# Nudna matematyka?

*Analizując wyniki tegorocznych Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych widać wyraźnie duży udział (często zwieńczony sukcesem) zawodników ze Śląska. Czyżby zagłębie węglowe z braku perspektyw przeradzało się w zagłębie matematyczne?*

Przedstawiamy Wam konkurs matematyczny województwa śląskiego pod nieco przewrotną nazwą Nudna Matematyka. Jest on organizowany od 1992 r. przez Pracownię Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach. Biorą w nim udział uczniowie klas IV–VI szkół podstawowych oraz gimnazjaliści z całego województwa. Każdy rocznik ma inne zadania, można więc powiedzieć, że Nudna Matematyka to sześć konkursów w jednym.

Zawody są trzyetapowe. Do eliminacji przystępuje ponad 1200 uczestników zgłoszonych przez ok. 130 szkół. Zawody odbywają się w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, osobno dla każdej grupy wiekowej. Do drugiego etapu w każdej kategorii kwalifikuje się około 40 najlepszych uczniów, a z tej grupy wyłanianych jest 12 finalistów. W pierwszych dwóch etapach uczniowie rozwiązują cztery zadania w ciągu 40 min, a w finale – trzy zadania w 30 min. Udział w konkursie jest płatny (8 zł od osoby). W wielu szkołach opłaty uiszczają rady rodziców.

Finaliści otrzymują nagrody i są zapraszani do udziału w zajęciach Pracowni Matematyki Pałacu Młodzieży. Wielu spośród nich jest stypendystami Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci. Niektórzy ukończyli już studia matematyczne.

Poniżej prezentujemy tegoroczne zadania finałowe dla gimnazjum. Więcej zadań z tego konkursu można znaleźć na stronie internetowej

www.pm.katowice.pl/pracownia/matematyka/konkursy/nudna

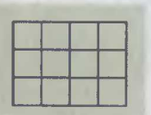
*Dorota Kolany*

### Zadania dla klasy I

1. Iloczyn czterech parami względnie pierwszych liczb naturalnych, z których każda jest większa od jeden, jest podzielny przez 120. Znajdź te liczby, wiedząc, że są one najmniejsze z możliwych.

2. W pewnym wielokącie foremnym liczba przekątnych jest cztery razy większa niż liczba boków. Usuwamy jeden z wierzchołków tego wielokąta, a sąsiadujące z nim wierzchołki łączymy nowym bokiem. Ile przekątnych i ile osi symetrii ma otrzymany w ten sposób wielokąt?

3. W prostokącie (patrz rys.) rysujemy trójkąty prostokątne o wierzchołkach w punktach kratowych. Ile takich trójkątów można narysować?





### Zadania dla klasy II

1. Jeżeli pewną liczbę dwucyfrową zmniejszymy o 54, to otrzymamy liczbę o tych samych cyfrach, lecz ustawionych w odwrotnej kolejności. Jaka to mogła być liczba?

2. Jaka jest setna cyfra po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ułamka:
a) $\frac{5}{22}$, b) $\frac{5}{37}$, c) $\frac{5}{7}$?

3. Przecinając dwie proste równoległe trzema prostymi równoległymi otrzymujemy trzy różne równoległoboki – dwa małe i jeden duży. Ile równoległoboków otrzymamy przecinając:
a) dwie proste równoległe czterema równoległymi,
b) dwie proste równoległe pięcioma równoległymi,
c) trzy proste równoległe trzema równoległymi,
d) trzy proste równoległe czterema równoległymi?

### Zadania dla klasy III

1. Po okręgu o długości 80 cm poruszają się ze stałą szybkością dwa punkty. Jeżeli kierunki ich ruchów są zgodne, to pierwszy punkt wyprzedza drugi co 5 sekund. Jeżeli zaś ich kierunki byłyby przeciwne to punkty mijałyby się co 2 sekundy. Oblicz szybkość każdego z tych punktów.

2. Czy (odpowiedzi uzasadnij):
a) suma kwadratów dwóch liczb nieparzystych może być kwadratem liczby całkowitej,
b) suma kwadratów dwóch liczb parzystych może być kwadratem liczby całkowitej,
c) suma kwadratów dwóch liczb naturalnych, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta, może być kwadratem liczby całkowitej?

3. Trójkąt równoboczny podziel na:
a) trzy przystające trójkąty, b) trzy przystające trapezy, c) trzy przystające deltoidy.

Wśród osób, które do końca września przyślą poprawne rozwiązania, rozlosujemy nagrody książkowe.

# Sztafeta pokoleń, czyli 5-10-15-20

## Wszystkie drogi...

5. Czy możliwe, żeby połową trzynastu było osiem?

10. Jakie liczby naturalne dwucyfrowe zwiększają się po skreśleniu cyfry z lewej strony?

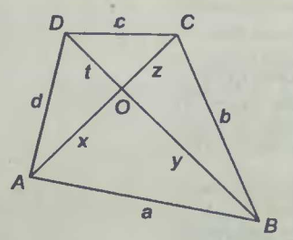
15. Jak otrzymać 50 odejmując od czterdziestu dziesięć?

20. Czy w rzymskim zapisie liczby ten sam znak może powtarzać się 4 razy?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

# Czworokąt z klasą

*Wiele własności czworokątów wypukłych zależy od tego, jak zachowują się ich przekątne, np. jeśli połowią się, to jest to równoległobok, a jeśli ponadto są równe, to jest to prostokąt. Poniżej przyjrzymy się czworokątom, których przekątne są prostopadłe.*



Rys. 1

Rozważmy czworokąt wypukły *ABCD*, którego przekątne są prostopadłe. Niech *a*, *b*, *c*, *d* będą długościami jego boków, *O* – punktem przecięcia przekątnych, a *x*, *y*, *z*, *t* odległościami tego punktu od wierzchołków (jak na rysunku 1).

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów *AOB*, *BOC*, *COD* i *DOA* otrzymujemy

$$x^2+y^2=a^2,\quad y^2+z^2=b^2,\quad z^2+t^2=c^2,\quad t^2+x^2=d^2.$$

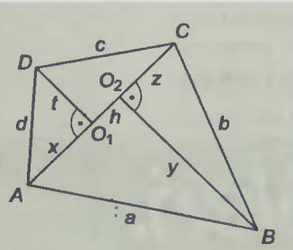
Wynika stąd, że

$$a^2+c^2=(x^2+y^2)+(z^2+t^2)=(y^2+z^2)(x^2+t^2)=b^2+d^2,$$

czyli

$$a^2+c^2=b^2+d^2.$$

Zatem sumy kwadratów przeciwległych boków w takim czworokącie są równe. Czy taką własność mają tylko czworokąty o prostopadłych przekątnych?



Rys. 2

Załóżmy, że zachodzi powyższa równość. Czy wynika stąd, że przekątne czworokąta są prostopadłe? Zróbmy nowy rysunek. Niech $O_1$ i $O_2$ oznaczają spodki wysokości trójkątów *ABC* i *ADC* opuszczonych na $\overline{AC}$ oraz niech $|O_1A|=x$, $|O_2B|=y$, $|O_2C|=z$, $|O_1D|=t$ oraz $|O_1O_2|=h$.

Mamy

$$a^2+c^2=b^2+d^2,$$

czyli

$$((x+h)^2+y^2)+((z+h)^2+t^2)=(y^2+z^2)+(x^2+t^2).$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$2hx+h^2+2hz+h^2=0,$$

czyli

$$2h(z+x+h)=0,$$

skąd

$$h=0.$$

Wobec tego $O_1=O_2$ i tym samym *BD* jest przekątną prostopadłą do przekątnej *AC*.

*Witold Bednarek*

## Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Jaką figurą może być czworokąt wypukły, w którym przekątne są prostopadłe? A jeśli ponadto:

a) połowią się?
b) są równe?
c) jedna połowi drugą?
d) są równe i połowią się?

Rozwiązanie w numerze.



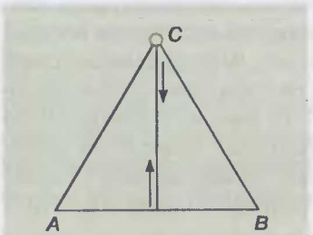
# Osiołek na pastwisku

Na łące w kształcie trójkąta równobocznego pasie się osiołek. Łąkę otaczają pola kukurydzy, owsa i prosa (rys. 1). Osiołek chciałby spróbować każdego z tych zbóż, ale po każdym chciałby też napić się wody i jeszcze nie zmęczyć się zanadto. W którym miejscu powinno być ustawione poidełko, żeby suma jego odległości od wszystkich pól była jak najmniejsza?

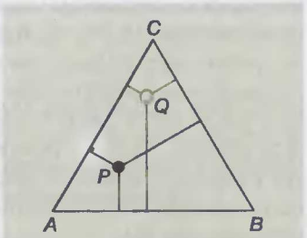
Rys. 1

Najprostszym rozwiązaniem wydaje się umieszczenie poidełka w jednym z wierzchołków trójkąta. Wtedy całkowita droga, jaką musi przebyć osiołek, aby spróbować trzech zbóż i po każdym napić się z poidełka, jest równa podwojonej wysokości trójkąta. (rys. 2).

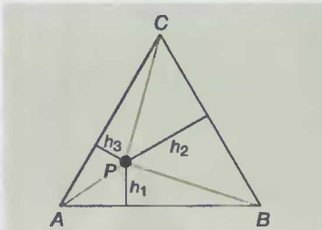
Czy jednak możemy być pewni, że suma dróg osiołka pokonanych w przypadku, gdy poidełko znajduje się w punkcie *P* lub *Q* (rys. 3), nie jest mniejsza?



Rys. 2



Rys. 3

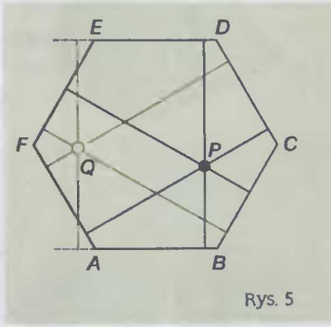


Rys. 4

Obliczmy sumę odległości punktu *P* od boków trójkąta. W tym celu łączymy punkt *P* z wierzchołkami (rys. 4) i porównujemy pola trójkąta *ABC* obliczone dwoma sposobami (*a* oznacza długość boku, a *h* – wysokości):

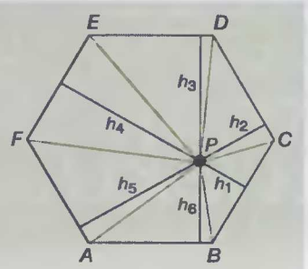
$$\frac{1}{2}a\cdot h=P_{\triangle ABC}=P_{\triangle APB}+P_{\triangle BPC}+P_{\triangle CPA}=$$
$$=\frac{1}{2}a\cdot h_1+\frac{1}{2}a\cdot h_2+\frac{1}{2}a\cdot h_3=\frac{1}{2}a(h_1+h_2+h_3).$$

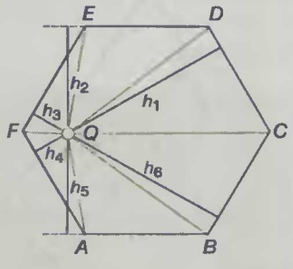
Porównując skrajne strony tych równości widzimy, że $h_1+h_2+h_3=h$ i suma ta jest stała, niezależna od położenia punktu *P* wewnątrz lub na brzegu trójkąta *ABC*. Zatem z każdego punktu łąki suma dróg przebytych przez osiołka będzie taka sama.



Rys. 5

Zauważmy, że podobną własność mają też inne wielokąty foremne: dla dowolnego punktu leżącego w ich wnętrzu lub na brzegu suma odległości tego punktu od boków (a dokładniej od prostych zawierających boki) jest stała (rys. 5).




Rys. 6

Dowód przeprowadza się analogicznie jak w przypadku trójkąta. (rys. 6)

$$P_{ABCDEF} = P_{\triangle ABP} + P_{\triangle BCP} + P_{\triangle CDP} + P_{\triangle DEP} + P_{\triangle EFP} + P_{\triangle FAP} = P_{\triangle ABQ} + P_{\triangle BCQ} + P_{\triangle CDQ} + P_{\triangle DEQ} + P_{\triangle EFQ} + P_{\triangle FAQ}$$

$$\frac{1}{2}a\cdot h_1 + \frac{1}{2}a\cdot h_2 + \frac{1}{2}a\cdot h_3 + \frac{1}{2}a\cdot h_4 + \frac{1}{2}a\cdot h_5 = \frac{1}{2}a\cdot h_1' + \frac{1}{2}a\cdot h_2' + \frac{1}{2}a\cdot h_3' + \frac{1}{2}a\cdot h_4' + \frac{1}{2}a\cdot h_5'$$

$$\frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) = \frac{1}{2}a(h_1' + h_2' + h_3' + h_4' + h_5')$$

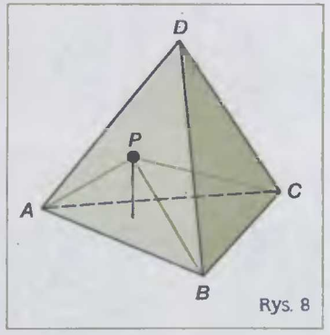
czyli

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = h_1' + h_2' + h_3' + h_4' + h_5'.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że tę samą własność mają nie tylko wielokąty foremne, ale wszystkie równoboczne (nigdzie nie korzystaliśmy z równości kątów wielokąta, a jedynie z równości boków) – rys. 7.

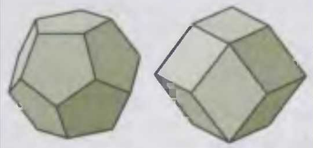
Rys. 7

Co więcej, własność analogiczną do równobocznego trójkąta ma też „trójwymiarowa łąka" w kształcie czworościanu foremnego. Weźmy dowolny punkty $P$ czworościanu i zaznaczmy jego odległości od ścian ($h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$). Następnie łączymy ten punkt ze wszystkimi wierzchołkami czworościanu. W ten sposób cały czworościan foremny $ABCD$ rozbije się na sumą czterech czworościanów $ABCP$, $BCDP$, $ACDP$ i $ABDP$ (na rysunku 8 przedstawiono jeden z nich). Podobny podział można też otrzymać dla dowolnie wybranego punktu $Q$ i zapisując na dwa sposoby objętość czworościanu $ABCD$ otrzymać równość $(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = (h_1' + h_2' + h_3' + h_4')$.




Rys. 8

Oczywiście czworościan foremny możemy w tym rozumowaniu zastąpić dowolnym innym wielościanem foremnym (ma przystające i foremne ściany). Foremność wielościanu zresztą nie jest wcale w tym rozumowaniu istotna. Wystarczy, żeby wszystkie ściany były przystające, ale niekoniecznie foremne (nazwijmy taki wielościan równościennym). Można nawet zrezygnować z przystawania ścian, wystarczy, żeby miały równe pola (nazwijmy taki wielościan równopolowym). Na rysunku 9 przedstawiono dwa przykłady dwunastościanów. Jeden jest foremny (ściany są pięciokątami foremnymi), a drugi równościenny (ma przystające ściany będące rombami).



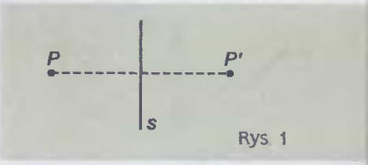
Rys. 9

Czy można podać przykład czworościanu równopolowego nie będącego foremnym ani równościennym? A innych wielościanów? (Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.)

*Małgorzata Mikołajczyk*

# Odbijany

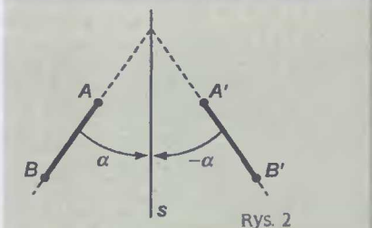
Z pewnością każdy z Was wie, na czym polega **symetria osiowa**, czyli **odbicie w prostej**. Jest to takie przekształcenie figury na inną figurę, że jeżeli prosta $s$ jest **osią symetrii**, to **obrazem** punktu $P$ w odbiciu jest punkt $P'$ leżący na prostej prostopadłej do $s$ i przechodzącej przez $P$. Ponadto $P'$ leży po innej stronie $s$ niż $P$, ale w takiej samej od $s$ odległości jak $P$ (rys. 1). Odbicie w prostej $s$ będziemy oznaczali jako $\underline{s}$.




Rys. 1

Zauważmy, że gdy odcinek $\overline{AB}$ tworzy z prostą $s$ kąt $\alpha$, to jego obraz $\overline{A'B'}$ tworzy z tą prostą kąt $-\alpha$; tej samej rozwartości, ale przeciwnie skierowany (rys. 2).

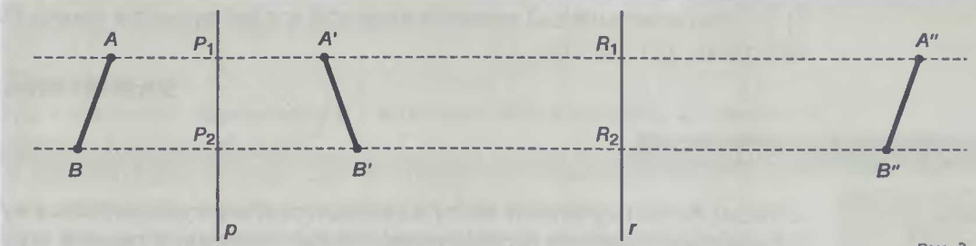
Figurę możemy odbijać kolejno w kilku prostych. Przekształcenie będące wynikiem takiego wielokrotnego odbijania nazywamy **złożeniem odbić**. Np. złożenie odbić $\underline{p}$ i $\underline{r}$ jest przekształceniem, jakie uzyskujemy po kolejnym wykonaniu odbicia figury najpierw w prostej $p$, a potem w prostej $r$. Takie złożenie będziemy oznaczali $\underline{p} \circ \underline{r}$.




Rys. 2

Pojawia się pytanie, czy złożenie $\underline{p} \circ \underline{r}$ jest odbiciem, ale w jakiejś nowej prostej $q$, czy też jest jakimś zupełnie innym przekształceniem. Rozważmy dwa przypadki, bowiem proste $p$ i $r$ na płaszczyźnie mogą *być równoległe* lub *mogą się przecinać*.

**I.** Niech $p \parallel r$ (rys. 3). Przekształćmy kolejno przez dwa odbicia odcinek $\overline{AB}$. Jego obrazem w odbiciu $\underline{p}$ jest $\overline{A'B'}$, a z kolei obrazem odcinka $\overline{A'B'}$ w odbiciu $\underline{r}$ jest $\overline{A''B''}$. Wobec tego w złożeniu $\underline{p} \circ \underline{r}$ obrazem odcinka $\overline{AB}$ jest $\overline{A''B''}$. Od razu widać, że $\underline{p} \circ \underline{r}$ nie może być odbiciem, bo jego oś powinna być prostopadła do odcinków $\overline{AA''}$ i $\overline{BB''}$, tzn. równoległa do prostych $p$ i $r$, a odcinek $\overline{A''B''}$ z taką prostą tworzy taki sam kąt, jak $\overline{AB}$, a nie przeciwny, co jest właściwe odbiciu.




Rys. 3

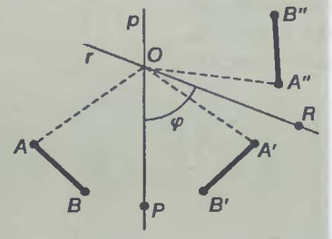
Odcinek $\overline{A''B''}$ jest równoległy do $\overline{AB}$, ponieważ odcinki $\overline{AA''}$ i $\overline{BB''}$, są równoległe i równe. Rzeczywiście, oznaczając przez $d$ odległość prostych $p$ i $r$ mamy:

$$|AA''| = |AP_1| + |P_1A'| + |A'R_1| + |R_1A''| = |AP_1| + |P_1R_1| + |R_1A''| =$$
$$= |AP_1| + d + |R_1A''| = |P_1A'| + d + |R_1A'| = 2d$$

oraz

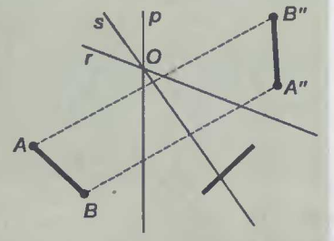
$$|BB''| = |BP_2| + |P_2B'| + |B'R_2| + |R_2B''| = |BP_2| + |P_2R_2| + |R_2B''| =$$
$$= |BP_2| + d + |R_2B''| = |P_2B'| + d + |R_2B'| = 2d.$$

Widać stąd, że rezultatem złożenia $\underline{p} \circ \underline{r}$ jest **przesunięcie równoległe**.



Rys. 4

**II.** Niech $p \nparallel r$ (rys. 4). Obrazem odcinka $\overline{AB}$ w odbiciu $\underline{p}$ jest $\overline{A'B'}$, a obrazem odcinka $\overline{A'B'}$ w odbiciu $\underline{r}$ jest $\overline{A''B''}$. Wobec tego w złożeniu $\underline{p} \circ \underline{r}$ obrazem odcinka $\overline{AB}$ jest $\overline{A''B''}$. Tu od razu widać, że $\underline{p} \circ \underline{r}$ nie jest przesunięciem równoległym, ale nie widać od razu, że nie jest to odbicie w żadnej prostej. Mogłaby istnieć prosta $s$ (rys. 5) będąca osią symetrii tych odcinków, ale wtedy punkt $B$, jako bliższy osi, przechodziłby na $A''$, a nie na $B''$, co ma miejsce przy złożeniu.



Rys. 5

Możemy zauważyć, że punkty $A$, $A'$, $A''$ są jednakowo oddalone od punktu $O$ (przecięcie prostych $p$ i $r$), bo odcinki $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ i $\overline{OA''}$ są przystające, jako ramiona w równoramiennych trójkątach $\triangle OAA'$ i $\triangle OA'A''$; podobnie punkty $B$, $B'$, $B''$ są jednakowo oddalone od $O$. Spostrzeżenie to sugeruje, iż złożenie $\underline{p} \circ \underline{r}$ w tym wypadku może być obrotem wokół punktu $O$. Obliczmy, jaki byłby kąt tego ewentualnego obrotu i czy jest on taki sam dla punktów $A$ i $B$. Mamy (patrz rys. 4):

$$\sphericalangle AOA'' = \sphericalangle AOP + \sphericalangle POA' + \sphericalangle A'OR + \sphericalangle ROA'' = \sphericalangle AOP + \sphericalangle POR + \sphericalangle ROA'' =$$
$$= \sphericalangle AOP + \varphi + \sphericalangle ROA'' = \sphericalangle POA' + \varphi + \sphericalangle A'OR = 2\varphi.$$

W podobny sposób można obliczyć, że $\angle BOB'' = 2\varphi$. Oznacza to, że w tym przypadku złożenie $\underline{p} \circ \underline{r}$ jest **obrotem wokół punktu $O$**. Można zatem sformułować:

**Twierdzenie**. Złożenie dwóch odbić w prostych ($\underline{p} \circ \underline{r}$) jest:

a) przesunięciem równoległym o wektor prostopadły do osi i dwukrotnie większy od odległości prostych $p$ i $r$, gdy $p \parallel r$,

b) obrotem wokół punktu $O$ przecięcia prostych $p$ i $r$ o kąt dwukrotnie większy od kąta między $p$ i $r$, gdy $p \nparallel r$.

*Stanisław Fudali*

## KONKURS

UWAGA! Wśród Czytelników, którzy do końca września przyślą najdłuższy wyraz posiadający pionową lub poziomą oś symetrii, rozlosujemy nagrody książkowe.

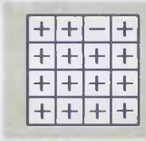
# Samouczek zadaniowy

# Kolorowe szachownice

*Wdzięcznym tematem zadań łamigłówkowych są szachownice. Problemy z nimi związane mogą być rozmaite, często jednak sprytnym sposobem, który łatwo wiedzie do rozwiązania, jest nietypowe kolorowanie pól szachownicy. Może ono pomóc w lepszej redakcji rozwiązania, ale często po prostu je umożliwia, gdyż inne metody byłyby bardzo skomplikowane. Wybór sposobu kolorowania szachownicy związany jest z odnalezieniem pewnego niezmiennika, czyli cechy, która nie zmienia się podczas wykonywania opisanych w zadaniu operacji.*

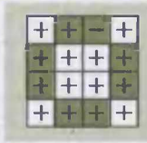
## Zadanie 1

Dana jest szachownica 4 × 4 wypełniona znakami „+" i „–" jak na rysunku. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne w dowolnej linii pionowej, poziomej i ukośnej. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?



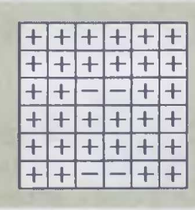
### Rozwiązanie

Wystarczy pokolorować szachownicę jak na rysunku i zauważyć, że liczba minusów na ciemnych polach pozostaje zawsze nieparzysta. (Dlaczego?) W szczególności nie może być równa zeru.



## Zadanie 2

Dana jest szachownica 6 × 6 wypełniona znakami „+" i „–" jak na rysunku. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne w dowolnej linii pionowej, poziomej i ukośnej. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?



### Podpowiedź

Pokoloruj np. 10 pól w tym 3 ze znakiem „–".

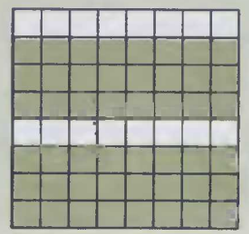
## Zadanie 3

Na każdym polu szachownicy 8 × 8 napisano liczbę całkowitą. Dozwolone są następujące operacje:

– wszystkie liczby zawarte w pewnym kwadracie 3 × 3 zwiększamy o 1,

– wszystkie liczby zawarte w kwadracie 4 × 4 zwiększamy o 1.

Czy zawsze (tzn. niezależnie od tego, jakie były wyjściowe liczby) wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę wypełnioną wielokrotnościami trójki?



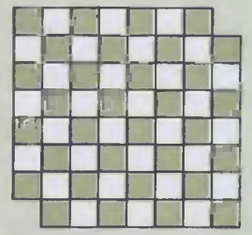
### Rozwiązanie

Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku. Zauważmy, że po wykonaniu dowolnej operacji reszta z dzielenia przez 3 sumy liczb znajdujących się na ciemnych polach nie zmienia się, bo:

– jeśli wykonujemy pierwszą operację, to suma ta zawsze wzrasta o sześć lub dziewięć, zatem reszta z dzielenia przez 3 nie zmienia się,

– jeśli wykonujemy drugą operację, to suma wzrasta zawsze o 12 i znów reszta z dzielenia przez 3 się nie zmienia.

Wystarczy więc na początku wpisać w ciemne pola takie liczby, których suma nie jest podzielna przez 3. Wtedy nigdy nie da się wypełnić szachownicy wielokrotnościami trójki, bo ich suma jest podzielna przez 3, a to jest niemożliwe.

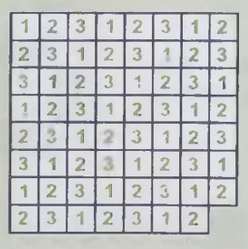


### Zadanie 4

Mamy szachownicę z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami. Czy da się ją pokryć płytkami o wymiarach 1 × 2 pola?

### Rozwiązanie

Płytka w dowolnym położeniu pokrywa jedno pole białe i jedno czarne. Przeciwległe narożniki są tego samego koloru, więc po ich usunięciu na szachownicy będzie więcej pól jednego koloru. Takie pokrycie nie jest zatem możliwe.




### Zadanie 5

Czy szachownicę z wyciętym jednym rogiem można pokryć płytkami o wymiarach 1 × 3 pola?

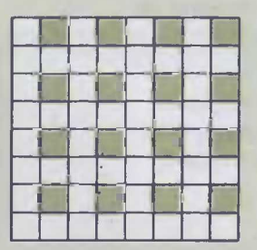
### Podpowiedź

Pokoloruj szachownicę trzema kolorami jak na rysunku.

Metodę kolorowania można też wykorzystać w zadaniach o grach. Często warto pokolorować „pola wygrywające" (por. MMM 1/2003 *Gry w matematyce rekreacyjnej* 2), co pozwala na łatwiejsze znalezienie strategii wygrywającej któregoś z graczy.

### Zadanie 7

Na szachownicy 8 × 8 w lewym dolnym rogu stoi pionek. Dwóch graczy może go przesuwać na zmianę o jedno pole, w jednym z podanych na rysunku kierunków. Wygrywa ten, kto pierwszy umieści pionek w prawym górnym rogu. Jak powinien grać rozpoczynający, aby wygrać?



### Rozwiązanie

Na rysunku zaznaczono pola wygrywające: jeśli gracz rozpoczynający przejdzie w pierwszym ruchu na pole ciemne, wtedy jego przeciwnik musi wejść na pole jasne. W dalszej części rozgrywki gracz rozpoczynający powinien poruszać się zawsze po polach ciemnych.



## Zadania do samodzielnego rozwiązania

Odpowiedzi wewnątrz numeru.

### Zadanie 1

Dana jest szachownica o wymiarach 4 × 4 wypełniona 15 znakami „+" i jednym znakiem „–". Dozwolone są zamiany na przeciwne wszystkich znaków znajdujących się w wierszu, w kolumnie lub na przekątnej (nie dowolnej linii ukośnej). Czy istnieje takie miejsce, że jeśli w nim na początku znajduje się „–", to wykonując pewną liczbę dozwolonych operacji da się otrzymać szchownicę z samymi „+"?

### Zadanie 2

Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13 × 13 czterdziestoma dwoma płytkami o wymiarach 4 × 1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte?

### Zadanie 3

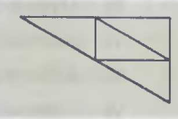
Andzia i Bob narysowali na asfaltowym boisku pas, który podzielili na 25 pól, tak że na jednym polu może stanąć jedna osoba. Grają w grę polegającą na tym, że na zmianę stają na polach, posuwając się ku drugiemu końcowi pasa. Zawodnik musi w każdym ruchu wyprzedzić przeciwnika, jednak nie może stanąć dalej niż o trzy pola od niego. Rozpoczynający może stanąć na jednym z trzech pól początkowych, a zwycięży ten, kto pierwszy zajmie ostatnie pole. Czy Andzia, która rozpoczyna grę, ma strategię wygrywającą, czyli taki sposób gry, że wygra bez względu na to, jakie ruchy będzie wykonywał Bob?

*Lech Stawikowski*

LITERATURA

1. Daniar Ch. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna ADAM, Warszawa.
2. Tlimatias „Delta" nr 3/2003 i 5/2003.
3. Zadania „Delta" nr 1/1999, 9/2000, 12/2000.
4. Piotr Hajłasz *Wielomino* „Delta" nr 2/1994.

## Odpowiedź na pytanie z artykułu *Osiołek na pastwisku* ze strony 11

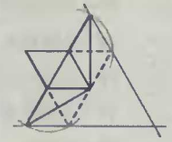


Rys. 1

Oto siatki:

a) czworościanu równościennego, który nie jest foremny (rys.1),

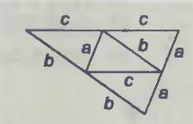
b) czworościanu równopolowego, który nie jest równościenny (rys. 2).



Rys. 2

Niestety oba te modele sklejają się „na płasko".

Czworościan równopolowy musi być równościenny, ale nie musi być foremny. Oto (rys. 3) poprawiona siatka takiej bryły.

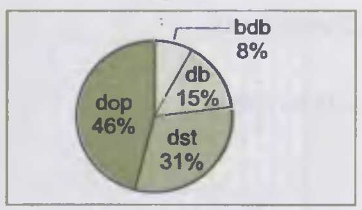



Rys. 3

# Rozmaitości z rozwiązaniami

*Każdy, kto rozwiązywał zadania matematyczne, wie, że daleko łatwiej jest, gdy można z kimś o nurtującym nas problemie porozmawiać (czy dotyczy to tylko matematyki?). Wiedział o tym wielki, zmarły niedawno matematyk Pál Erdős, który publikował prace wspólnie z setkami matematyków z całego świata. Jako współautora jednej z nich podał nawet konduktora z pociągu, w którym jechał, gdyż to właśnie podczas prowadzonej z nim rozmowy wpadł na pomysł rozwiązania jakiegoś problemu.*
*W poniższych zadaniach drogę prowadzącą do rozwiązania prezentujemy właśnie w formie dialogu (nauczyciela z uczniami). Mamy nadzieję, że ułatwi to Czytelnikom śledzenie kolejnych kroków odkrywania rozwiązania.*

## 1. Diagramy, czyli coś mniej więcej




**Profesor Szaradek przedstawił na diagramie procentowym wyniki sprawdzianu kilkunastoosobowej grupy uczniów (patrz rysunek). Liczby procentów zostały zaokrąglone do jedności. Ile osób było w tej grupie?**

**Wojtek** – Ale tego nie da się zrobić!
**Nauczyciel** – Czyżby? Czemu miałoby się nie dać?
**W** – Bo danych jest za mało, a poza tym są jakieś mało konkretne.
**N** – Ale jednak jakieś są.
**W** – No dobrze, spróbuję. Ale od czego zacząć?
**N** – Jak zawsze – od dokładnego przeanalizowania treści.
**W** – Czytałem zadanie już trzy razy i nic nie przychodzi mi do głowy.
**N** – Ale wiesz, co masz obliczyć?
**W** – No tak, liczbę osób w grupie.
**N** – A co o tej grupie wiemy?
**W** – Tylko tyle, że było w niej kilkanaście osób.
**N** – Czyli...
**W** – Coś między 11 a 19.
**N** – Jaki procent całej grupy mogła stanowić jedna osoba?



**W** – O, zaraz to obliczę. Ułamkowi $\frac{1}{11}$ odpowiada $\left(\frac{1}{11}\cdot 100\right)\%$, czyli $9\frac{1}{11}\%$, zaś liczbie $\frac{1}{19}$ odpowiada $\left(\frac{1}{19}\cdot 100\right)\%$, czyli $5\frac{5}{19}\%$. Zatem jedna osoba stanowi w zaokrągleniu od 5% do 9%.
**N** – No to spójrz jeszcze raz na diagram.
**W** – Teraz widzę! Ocenę bardzo dobrą otrzymało 8% osób, czyli musiała to być... jedna osoba!
**N** – Brawo! Ale co dalej?
**W** – Wystarczy ustalić, przy jakiej wielkości grupy jedna osoba stanowi 8%, no po zaokrągleniu do jedności.
**N** – Oznaczymy przez $n$ liczbę osób w grupie.
**W** – Wtedy musi zajść nierówność $7{,}5 \le \frac{100}{n} < 8{,}5$. Już biorę kalkulator.
**N** – I co?
**W** – Eee tam, nie bardzo wyszło. Pasuje $n = 12$ i $n = 13$.
**N** – No, ale wyeliminowałeś już sporo innych możliwości. Jak rozstrzygnąć, które $n$ jest dobre? A może oba?
**W** – No to wróćmy do diagramu. – Wojtek wyraźnie się rozkręcał. – Ocenę dobrą dostało 15% grupy. To musiały być dwie osoby! Sprawdzę, w którym przypadku stanowią one (po zaokrągleniu) 15% całości. Mamy $\left(\frac{2}{12}\cdot 100\right)\% = 16\frac{2}{3}\% \approx 17\%$. Ten wynik odpada. Ale dla $n = 13$: $\left(\frac{2}{13}\cdot 100\right)\% = 15\frac{5}{13}\% \approx 15\%$ jest dobrze, czyli grupa liczyła 13 osób i mamy rozwiązanie.
**N** – Prawie mamy.
**W** – Dlaczego tylko prawie? Przecież jest jeden wynik.
**N** – To prawda. Jakiś wynik otrzymaliśmy. Ale w zadaniu są jeszcze inne informacje – o ocenach dostatecznych i dopuszczających. Nasz wynik nie może być z nimi sprzeczny. Bywają przecież zadania, które nie mają rozwiązania.
**W** – No, dobrze, sprawdźmy.
**N** – Jak myślisz, ile osób otrzymało ocenę dostateczną?
**W** – Pewnie 4, bo 31%, to około 4 razy więcej niż 8%. Sprawdzę to: $\left(\frac{4}{13}\cdot 100\right)\% = 30\frac{10}{13}\% \approx 31\%$. Zgadza się. Zostały jeszcze oceny dopuszczające. Tych powinno być $13 - 1 - 2 - 4$, czyli 6. Sprawdźmy: $\left(\frac{6}{13}\cdot 100\right)\% = 46\frac{2}{13}\% \approx 46\%$. I znów się zgadza. Czy teraz jest już koniec?
**N** – Tak. Teraz wiemy z całą pewnością, że w tej grupie było 13 uczniów.
**W** – Ale najdziwniejsze w tym zadaniu było to, że z niedokładnych danych udało się nam uzyskać dokładny wynik. I bez żadnego zgadywania.
**N** – Na tym właśnie polega dedukcja, czyli...
**W** – Wiem, wiem. Też czytałem *Przygody Sherlocka Holmesa*.

## 2. Wycinanki, czyli uda się albo i nie

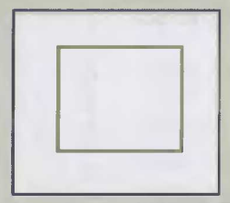
**Na lekcji techniki profesor Złota Rączka poleciła uczniom wyciąć z kartonu pięć kół o promieniu 10 cm. Uczniowie wyjęli prostokątny arkusz kartonu o wymiarach 46 cm na 50 cm. Jak powinni rozmieścić te koła?**

Wskazówki i odpowiedzi do 5–10–15–20: 5-10-15) Pomysł o zapisie rzymskim. 20) Tak, ale nie obok siebie (np. 39, znajdź inne przykłady)

**Asia** – Próbowałam na różne sposoby i zawsze zabrakło mi miejsca na ostatnie koło. Ten karton jest chyba za mały, albo co... Próbowałam nawet obliczać pole kartonu i pola kół i sprawdzić, czy się zmieszczą, ale wszystko jest w porządku, zostaje spory zapas.

**N** – No, tak, ale kołami trudno jest szczelnie wypełnić prostokątny arkusz. Jakieś ścinki muszą zostać.

**A** – No to co mam zrobić?



**N** – Spróbuj zamiast kół narysować prostokąt, którego boki są odległe o 10 cm od brzegów arkusza.

**A** – Ale po co?

**N** – Widzę, że narysowałaś wcześniej kilkanaście kół. Spójrz, gdzie są ich środki?

**A** – Wszystkie należą do tego prostokąta!

**N** – No, właśnie. A czy mogłoby być inaczej?

**A** – Nooo... nie. Przecież promień koła ma 10 cm, a tu powstała ramka również o szerokości 10 cm.

**N** – W takim razie połącz środki równoległych boków narysowanego prostokąta.

**A** – Gotowe. Prostokąt został podzielony na cztery mniejsze.

**N** – A ile kół miałaś wyciąć?

**A** – Pięć.

**N** – A gdybyś miała pięć chomików umieścić w czterech klatkach, to co na pewno by się zdarzyło?

**A** – Byłaby jedna klatka, do której musiałabym włożyć przynajmniej dwa chomiki.

**N** – Bardzo dobrze. To samo można zastosować do naszego problemu?

**A** – Zawsze będzie jeden prostokąt, do którego będą należeć środki przynajmniej dwóch kół.

**N** – A jaka może być wtedy największa odległość między tymi środkami?

**A** – Równa przekątnej tego małego prostokąta.

**N** – Czyli ile?

**A** – To umiem obliczyć. Arkusz ma wymiary 46 cm na 50 cm, więc mój duży prostokąt ma boki 26 cm i 30 cm, więc każdy z małych prostokątów ma wymiary 13 cm na 15 cm.

**N** – Ale jak obliczyć długość przekątnej?

**A** – To proste – z twierdzenia Pitagorasa. Jest ona równa $\sqrt{13^2+15^2}$ cm, czyli $\sqrt{394}$ cm.

**N** – To mało konkretny wynik. Spróbuj go oszacować.

**A** – To na pewno mniej niż 20 cm, bo $20^2 = 400$ ale więcej, niż...

**N** – Nie musisz już nic liczyć. Jeśli wiemy, że zawsze są dwa koła, których...

**A** – ... których środki są odległe o mniej niż 20 cm, a koła mają przecież promienie 10 cm, to oczywiście muszą na siebie zachodzić.

**N** – No, właśnie, więc problem mamy rozwiązany.

**A** – My tak, ale nie uczniowie pani Złotej Rączki. Muszą znaleźć więcej kartonu.



# 3. Imieniny mamy

**Tato, Asia i Wojtek składają się na prezent dla mamy. Tato zadeklarował, że doda połowę tego, co dadzą dzieci, i dołoży jeszcze 13 zł. Asia postanowiła dać trzecią część tego, co dadzą tato i Wojtek razem, i też dołożyć 13 zł. Wojtek jest oszczędny, chce dać czwartą część tego, co dadzą razem Asia i tato, ale także dołoży jeszcze 13 zł. Ile może kosztować prezent? Ile pieniędzy powinna dać każda osoba?**

**Wojtek** – Trzeba to jakoś uporządkować i po kolei obliczyć. Węszę w tym jakieś skomplikowane rachunki.

**Nauczyciel** – Co nieco rzeczywiście trzeba będzie policzyć, ale jak się podzielimy pracą i każdy zrobi trochę, to będzie łatwiej. Od czego zaczniemy?

**Asia** – Może od literek. Umówmy się, jak oznaczymy szukane wartości. Może niech $t$ oznacza kwotę, jaką da tato, $w$ – Wojtek i $a$ – Asia.

**N** – Warto jeszcze oznaczyć np. przez $p$ całą kwotę uzbieraną na prezent. Wtedy $(p-t)$ to udział dzieci. Tato daje połowę z tego i jeszcze 13 zł, czyli $t=\frac{1}{2}(p-t)+13$.

**A** – W takim razie można też napisać: $a=\frac{1}{3}(p-a)+13$.

**W** – A także $w=\frac{1}{4}(p-w)+13$. I co z tym?

**N** – A to, że każdy może teraz ze swojego równania wyznaczyć swoją niewiadomą. O tak: $2t=p-t+26$, czyli $3t=p+26$, a stąd $t=\frac{1}{3}p+\frac{26}{3}$.

**W** – Mnie wyszło $w=\frac{1}{5}p+\frac{52}{5}$.

**A** – A mnie $a=\frac{1}{4}p+\frac{39}{4}$.

**N** – Świetnie. A co to jest $t+a+w$?

**A i W** – To jest $p$!!!

**N** – Tak więc mamy: $t+a+w=\frac{1}{3}p+\frac{26}{3}+\frac{1}{4}p+\frac{39}{4}+\frac{1}{5}p+\frac{52}{5}$, czyli $p=\frac{1}{3}p+\frac{1}{4}p+\frac{1}{5}p+\frac{26}{3}+\frac{39}{4}+\frac{52}{5}$. Żeby zlikwidować ułamki, pomnóżmy obie strony przez 60 i mamy: $60p = 20p+15p+12p+26\cdot 20+39\cdot 15+52\cdot 12$. I co dalej?

**A** – Po uproszczeniu $60p = 47p + 1729$.

**W** – Czyli $13p = 1729$. Teraz trzeba podzielić 1729 przez 13.

**A** – Ja mam kalkulator, $p = 133$.

**W** – No to obliczyliśmy, że prezent ma kosztować 133 zł, ale dalej nie wiemy, po ile każdy ma się złożyć.

**A** – To sobie oblicz ze swojego równania, tak, jak ja.

$a=\frac{1}{4}\cdot 133+\frac{39}{4}=\frac{172}{4}=43$. Czyli Asia powinna dać 43 zł. A Wojtek?

**W** – Już liczę: $w=\frac{1}{5}\cdot 133+\frac{52}{5}=\frac{185}{5}=37$, czyli daje tylko 37 zł. A tato?

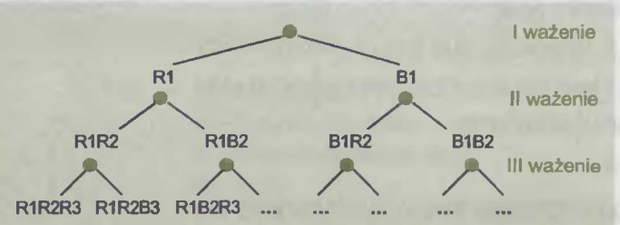
**N** – Ja już obliczyłem: $t=\frac{1}{3}\cdot 133+\frac{26}{3}=53$, czyli udział taty to 53 zł.

**W** – Rzeczywiście: $43+37+53=133$. Muszę to zaproponować w domu. Niedługo mamy imieniny mamy.

*Jerzy Janowicz*

# Trzynasta moneta

*Poniżej prezentujemy rozwiązanie zadania o 13 monetach, które pojawiło się w artykule „Fałszywe monety" w numerze 2/2003. Zadanie o 12 monetach opiera się na identycznym pomyśle i jest prostszym przypadkiem tego zadania.*



Rys. Ogólny schemat postępowania

**Zadanie 1.** Jak w trzech ważeniach na wadze szalkowej znaleźć fałszywą wśród 12 jednakowych z wyglądu monet i stwierdzić, czy jest ona lżejsza, czy cięższa od pozostałych?

**Zadanie 2.** Mamy 13 monet, z których jedna jest fałszywa. Jaka liczba ważeń wystarczy do jej wykrycia (bez określania, czy jest lżejsza, czy cięższa)?

Do wykrycia fałszywej monety w obu zadaniach wystarczą trzy ważenia. Sposób postępowania (patrz rysunek) jest podobny, ale trzynasta moneta powoduje, że problem sprowadza się do wykrycia w dwóch ważeniach fałszywej monety nie spośród czterech, ale spośród pięciu. Na pierwszy rzut oka wydaje się to niemożliwe, ale...

**I ważenie. Na szalkach kładziemy po cztery monety.**
Możliwe są dwie sytuacje: R1 i B1.

R1 – równowaga w I ważeniu
Fałszywa moneta jest wśród pozostałych pięciu. Trzeba ją znaleźć w dwóch ważeniach. Ogólnie dla pięciu monet jest to niewykonalne, ale my mamy do dyspozycji osiem monet, o których wiemy, że są prawdziwe.

**II ważenie. Na szalkach kładziemy po dwie monety: na jednej dwie spośród nieważonych do tej pory, na drugiej jedną spośród nieważonych i prawdziwą.**
Możliwe są dwie sytuacje: R1R2 i R1B2.

R1R2 – równowaga w I i II ważeniu
Fałszywa jest jedna z nieważonych jeszcze monet.

**III ważenie. Na jednej szalce kładziemy jedną z nich, a na drugiej monetę prawdziwą.**

Możliwe są sytuacje: R1R2R3 i R1R2B3.

R1R2R3 – równowaga w I, II i III ważeniu
Fałszywa jest pozostawiona nieważona moneta (ale nie wiemy, czy jest ona lżejsza, czy cięższa od pozostałych).

R1R2B3 – równowaga w I i II, brak w III ważeniu
Ważona moneta jest fałszywa (i wiemy, czy lżejsza, czy cięższa).

R1B2 – równowaga w I, brak w II ważeniu
Pierwsza szalka opadła lub uniosła się. Ponieważ są to sytuacje symetryczne, załóżmy, że pierwsza szalka opadła. Oznaczmy monety w tym ważeniu jak na rysunku (P oznacza prawdziwą). $\frac{C\ C}{L\ P}$

**III ważenie. Na szalkach kładziemy po jednej monecie z pierwszej szalki (ozn. C).**

Możliwe są sytuacje: R1B2B3 i R1B2R3.

R1B2B3 – równowaga w I, brak w II i III ważeniu
Fałszywą monetą jest ta, która przeważy. Wiemy też, że fałszywa moneta jest cięższa od pozostałych.

R1B2R3 – równowaga w I i III, brak w II ważeniu
Fałszywa jest moneta oznaczona przez L i jest lżejsza od pozostałych.



Wracamy teraz do sytuacji po pierwszym ważeniu.

B1 – brak równowagi w I ważeniu
Jedna z szalek uniesie się. Możliwe układy są symetryczne, więc załóżmy, że będzie to pierwsza szalka. Oznaczmy monety w tym ważeniu jak na rysunku. Wiemy, że jedna z nich jest fałszywa.

$$\frac{LLLL}{CCCC}$$

**II ważenie. Odkładamy po jednej monecie C i L, a pozostałe rozkładamy następująco:**

$$\frac{LLCC}{LCPP}$$

Możliwe są dwie sytuacje: B1R2 i B1B2.

B1R2 – brak równowagi w I ważeniu i równowaga w II
Fałszywa jest jedna z odłożonych monet (C lub L). W trzecim ważeniu przekonmy się która.

**III ważenie. Kładziemy na jednej szalce jedną z „podejrzanych" monet, np. C, a na drugiej monetę P.**

Możliwe są sytuacje B1R2R3 i B1R2B3.

B1R2R3 – brak równowagi w I, równowaga w II i III ważeniu.

Fałszywa jest moneta L – lżejsza od pozostałych.

B1R2B3 – brak równowagi w I i III, równowaga w II ważeniu.

Fałszywa jest moneta C – cięższa od pozostałych.

B1B2 – brak równowagi w I i II ważeniu
Pierwsza szalka opadnie albo uniesie się. Ponieważ są to przypadki symetryczne, rozważymy tylko pierwszy (patrz rysunek). $\frac{LLCC}{LCPP}$
Po I ważeniu wiemy, że fałszywa jest albo jedna z dwóch monet C z pierwszej szalki, albo L z drugiej szalki. Wykonamy III ważenie, aby przekonać się, która.

**III ważenie. Na szalkach kładziemy po jednej z monet C, które opadły w drugim ważeniu.**

Możliwe są sytuacje: B1B2R3 i B1B2B3.

B1B2R3 – brak w I i II, równowaga w III ważeniu
Fałszywa (i lżejsza od pozostałych) jest moneta L, która w drugim ważeniu uniosła się.

B1B2B3 – brak równowagi w I, II i III ważeniu
Fałszywa (i cięższa od pozostałych) jest ta z monet C, która opadła.

Widać, że trzy ważenia pozwalają wykryć fałszywą monetę zarówno wśród dwunastu, jak i trzynastu. W pierwszym przypadku można dodatkowo określić, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych, w drugim – tylko wskazać, która to jest.

Można podać minimalną liczbę ważeń wystarczającą do znalezienia fałszywej wśród dowolnej liczby monet. Jeśli liczba monet jest z przedziału $\left\langle \frac{3^{n-1}+1}{2}, \frac{3^n-1}{2} \right\rangle$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, to tą minimalną liczbą ważeń jest właśnie $n$.

Inne bardzo pomysłowe rozwiązanie problemu trzynastu monet można znaleźć w *Kalejdoskopie matematycznym* Hugona Steinhausa.

*Lech Stawikowski*

# Pierwsze? Absolutnie!

*Wiele zagadnień dotyczących liczb daje się dość prosto sformułować. Z rozwiązaniami bywa różnie...*

Czy istnieją liczby pierwsze, które pozostają pierwszymi przy dowolnym przestawieniu ich cyfr w zapisie dziesiętnym? Nazwijmy je liczbami *absolutnie pierwszymi*. Oczywiście wszystkie jednocyfrowe liczby pierwsze tzn. 2, 3, 5, 7 są takie. Eksperymentując z niedużymi liczbami (pomocne mogą być tablice liczb pierwszych mniejszych od 1000), stosunkowo łatwo znaleźć kolejnych 18 takich liczb. Są to: 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991.

Czy można ich znaleźć jeszcze więcej? Jak dużo? Czy jest ich nieskończenie wiele?

Spróbujmy podejść do tego zagadnienia bardziej systematycznie. Zacznijmy od liczb, do zapisu których wykorzystujemy tylko jedną cyfrę np. 111, 333 333, 44 itp. Łatwo zauważyć, że wśród nich pierwsze mogą być tylko liczby postaci $A_n = 11...1$ (zapis dziesiętny składa się z $n$ jedynek). Ale czy wszystkie one są pierwsze? Nie, już $A_4 = 1111 = 11 \cdot 101$, więc nie jest to liczba pierwsza. Podobnie liczba $A_6 = 111\,111 = 111 \cdot 1001$ oraz $A_{15} = 111...111 = 11\,111 \cdot 10^{10} + 11\,111 \cdot 10^5 + 11\,111 = 11\,111 \cdot 10\,000\,100\,001$. Uogólniając to rozumowanie można wykazać, że jeśli $n$ jest liczbą złożoną, to $A_n$ także. Zostają zatem do rozważenia $A_n$ przy $n$ będącym liczbą pierwszą. I tu zaczynają się kłopoty. Na przykład $A_2 = 11$ jest pierwsze, ale $A_3 = 111 = 3 \cdot 37$ i $A_5 = 11\,111 = 41 \cdot 271$ są złożone. Nie ma więc tutaj jakiejś prostej reguły. Jak dotąd wśród liczb $A_n$ znaleziono pięć liczb pierwszych. Są to: $A_2$, $A_{19}$, $A_{23}$, $A_{317}$ oraz $A_{1031}$. Nie wiadomo, czy jest ich więcej. Oczywiście cała ta piątka to liczby *absolutnie pierwsze*.

Próbujmy dalej. Jeśli liczba *absolutnie pierwsza* jest przynajmniej dwucyfrowa, to jej zapis dziesiętny nie może zawierać żadnej z cyfr 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 (bo przenosząc tę cyfrę na koniec, dostajemy liczę złożoną). Zatem zapis liczby *absolutnie pierwszej* może zawierać jedynie cyfry 1, 3, 7 lub 9. Ale, co ciekawe, nie mogą one występować w nim wszystkie jednocześnie! Dlaczego?

Załóżmy, że $x$ jest liczbą $n$-cyfrową, której zapis zawiera wyłącznie wspomniane cyfry, każdą przynajmniej raz. Przestawiając te cyfry tworzymy liczbę $x_0 = \overline{c_n c_{n-1}...c_5 7931} = k \cdot 10^4 + 7931$, gdzie $k \in \mathbf{N}$. Popatrzmy na pewne przestawienia cyfr w czterocyfrowej końcówce tej liczby: $a_0 = 7931$, $a_1 = 1793$, $a_2 = 9137$, $a_3 = 7913$, $a_4 = 7193$, $a_5 = 1937$, $a_6 = 7139$. Liczby te dają różne reszty z dzielenia przez 7 (dokładniej liczba $a_i$ daje resztę $i$). Stąd wniosek, że także siedem liczb $x_i = k \cdot 10^4 + a_i$ dla $i \in \{0, 1, ..., 6\}$ daje siedem różnych reszt z dzielenia przez 7. Wobec tego jedna z liczb $x_i$ musi dawać resztę zero (tzn. być podzielna przez 7), zatem nie jest pierwsza. Czyli $x$ nie może być liczbą *absolutnie pierwszą*.

Co dalej? Znamy już 26 liczb *absolutnie pierwszych*. Można przekonać się (najlepiej pisząc odpowiedni program komputerowy), że nie ma *liczb absolutnie pierwszych* ani wśród liczb cztero-, ani pięciocyfrowych. Poszukiwania wśród większych liczb nie dały na razie ostatecznego rozstrzygnięcia. Wiadomo jedynie, że jeśli liczba jest absolutnie pierwsza, to musi być postaci:

$A_n = 11...1$ (znanych jest 5 przykładów takich liczb) lub

$A_{n(a,b)} = \overline{a...aba...a}$, gdzie $a$ i $b$ są różnymi cyframi spośród 1, 3, 7 i 9 i $a$ występuje $n-1$ razy, a $b$ tylko raz (znanych jest 17 przykładów takich liczb podanych na początku tekstu).

*opr. Waldemar Górski*

LITERATURA


1. A. Slinko: *Absolute Primes* (matholymp.com/ARTICLES/Absolute_Primes.pdf)
2. T. N. Bhargava and P. H. Doyle, *On the existence of absolute primes*, „Mathematics Magazine", 1974, vol. 47.
3. M. Gardner, *Mathematical games*, „Scientific American", June, 1964.
4. A. W. Johnson, *Absolute primes*, „Mathematics Magazine", 1977, vol. 50.


**Zadania dla Czytelników**

1) Czy istnieją sześciocyfrowe liczby absolutnie pierwsze?

2) Podaj przykłady liczb absolutnie pierwszych dla trójkowego zapisu pozycyjnego.

Wśród osób, które do końca września przyślą poprawne rozwiązania, rozlosujemy nagrody książkowe.

Jeśli naszym Czytelnikom uda się znaleźć coś na ten temat na polskich stronach www lub w literaturze, prosimy o informację.

*Redakcja*



## Rozwiązania zadań z artykułu *Kolorowe szachownice* ze strony 15

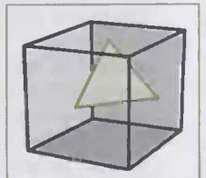
Zadanie 1. Rozważamy trzy przypadki. Jeśli znak „–" stoi w dowolnym rogu tablicy, to kolorujemy rogi i zauważamy, że zawsze wśród pokolorowanych pól znajduje się nieparzysta liczba znaków „–". Jeśli znajduje się wśród czterech środkowych pól, to kolorujemy te właśnie pola i znów widzimy, że wśród nich zawsze jest nieparzysta liczba minusów. Jeśli natomiast znak „–" znajdował się w dowolnym innym miejscu, to korzystamy z zadania 1 omówionego w artykule. Zatem w żadnym przypadku nie jest możliwa zamiana wszystkich znaków w tablicy na plusy.

Zadanie 2. Kolorujemy szachownicę jak na rysunku. Zauważmy, że każda płytka o wymiarach $4 \times 1$ pokrywa dokładnie dwa pola ciemne i dwa jasne. Pole środkowe jest jasne, a na szachownicy jest o 1 więcej pól ciemnych niż jasnych. Gdyby dało się pokryć szachownicę bez jednego pola, to musiałoby w niej być również o 1 więcej pól ciemnych niż jasnych, a tak nie jest, bo po wyrzuceniu środkowego pola są o dwa pola ciemne więcej.

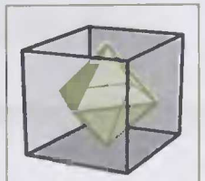
Zadanie 3. Kolorujemy wygrywające pola, rozpoczynając od końcowego. Będą to pola o numerach 25, 21, 17, 13, 9, 5 i 1. Jeśli staniemy na którymś z tych pól, to po wykonaniu ruchu przez przeciwnika, możemy znów stanąć na polu wygrywającym. Skoro pole 1 jest wygrywające, Andzia powinna stanąć na nim w pierwszym ruchu. Krócej: Andzia wygra stając na polach o numerach $4k+1$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$.

# Zrób sobie bryłkę

## Krewni stelli



Rys. 1

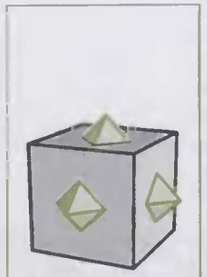


Rys. 2

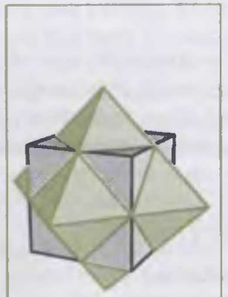
W poprzednim numerze patrząc na sześcian zauważyliśmy dwa mieszczące się w nim czworościany foremne (tworzące ośmioramienną gwiazdę). Teraz znowu wystartujemy od sześcianu. Połączmy środki trzech ścian o wspólnym wierzchołku. Otrzymamy trójkąt równoboczny umieszczony centralnie pod tym wierzchołkiem (rys. 1). Jeżeli powtórzymy tę operację dla pozostałych wierzchołków, to otrzymamy 8 trójkątów równobocznych (pod każdym z 8 wierzchołków sześcianu). Utworzą one ośmiościan foremny (rys. 2).

Wyobraźmy sobie, że ośmiościan ten zaczyna równomiernie rosnąć: wierzchołki przebijają ściany sześcianu, a krawędzie przybliżają się coraz bardziej do krawędzi sześcianu (rys. 3). W pewnym momencie krawędzie obu tych brył zetkną się i otrzymamy piękną kompozycję sześcianu i ośmiościanu (rys. 4).

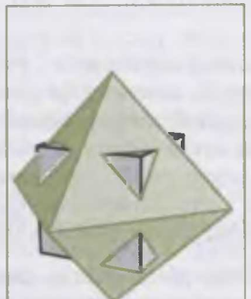
Rosnący dalej ośmiościan zacznie „połykać" sześcian (rys. 5), aż dojdziemy do sytuacji, w której cały sześcian znajdzie się wewnątrz ośmiościanu, a wierzchołki sześcianu będą dotykały ścian ośmiościanu (rys. 6).



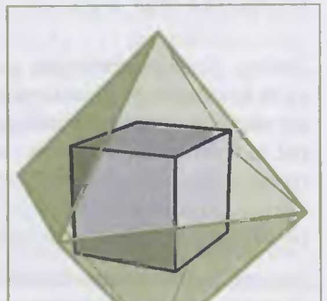
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

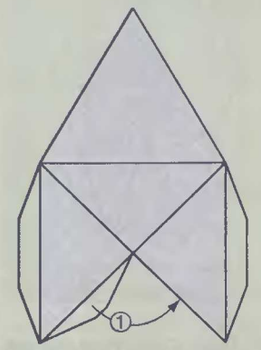


Rys. 6

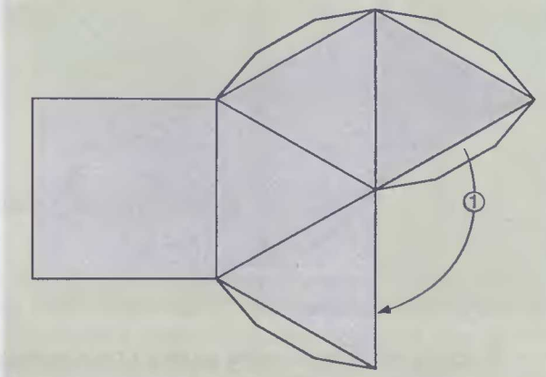
Proponuję wykonanie modelu kompozycji z rys. 4. Ogólne zasady postępowania zostały opisane w poprzednim numerze. Tym razem do zrobienia modelu będą potrzebne ostrosłupy dwóch rodzajów. Sześcian reprezentowany jest przez 8 ostrosłupów, których podstawami są trójkąty równoboczne, a ściany boczne są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi (przygotowujemy je w jednym kolorze), ośmiościan zaś – przez 6 ostrosłupów o podstawie kwadratowej i ścianach bocznych będących trójkątami równobocznymi (przygotowujemy je w innym kolorze). Siatki tych



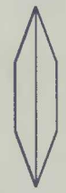
ostrosłupów przedstawione są na rys. 7 i 8. Wycięte siatki sklejamy zgodnie z opisem, a gotowe ostrosłupy łączymy za pomocą podwójnych skrzydełek (rys. 9).



Rys. 7



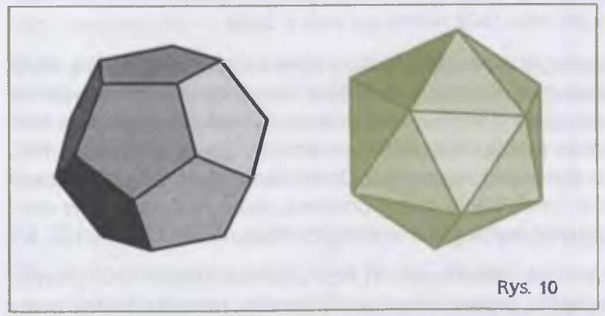
Rys. 8



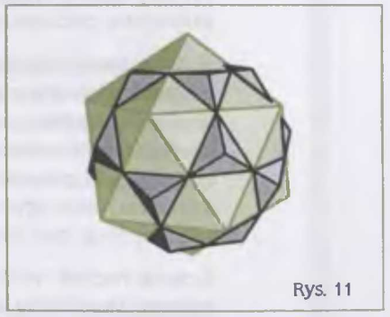
Rys. 9

W naszej podróży po krainie wielościanów spotkaliśmy dotychczas sześcian oraz czworościan i ośmiościan foremny. Są to trzy z pięciu wypukłych wielościanów foremnych. Dwa pozostałe to dwunastościan i dwudziestościan (rys. 10). Można sprawdzić, że tworzą one podobną parę jak sześcian z ośmiościanem, tzn. łącząc środki sąsiednich ścian jednej z nich otrzymujemy szkielet drugiej. O wielościanach tworzących taką parę mówimy, że są dualne.

Kompozycja dwunastościanu i dwudziestościanu (rys.11) jest nawet bardziej atrakcyjna od opisanej wcześniej. Wykonanie jej modelu wymaga wprawdzie więcej



Rys. 10



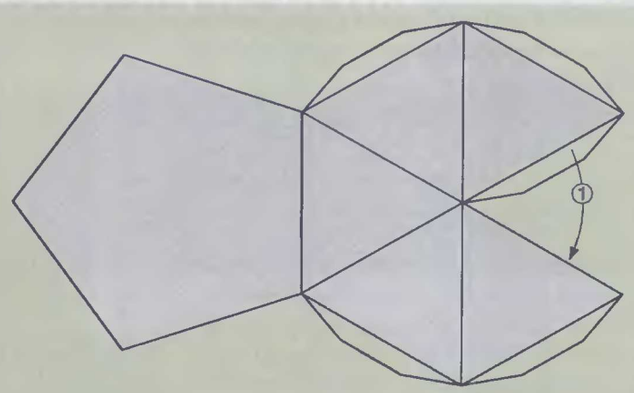
Rys. 11

pracy, gdyż łącznie należy skleić 32 ostrosłupy dwóch rodzajów (12 reprezentujących dwudziestościan i 20 – dwunastościan), ale efekt końcowy z pewnością jest tego wart. Odpowiednie siatki przedstawiają rys.12 i 13.

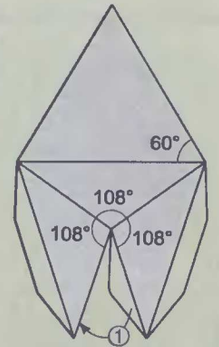
### Zadania dla Czytelników

1. Ile ścian, wierzchołków i krawędzi mają bryły z rys. 10 i 11?
2. Jaka bryła jest dualna do czworościanu foremnego?
3. Jaka jest zależność między liczbami ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanów dualnych?
4. Jak wyglądają części wspólne sześcianu z ośmiościanem oraz dwunastościanu z dwudziestościanem w opisanych kompozycjach?

Wśród osób, które do końca września przyślą poprawne rozwiązania, rozlosujemy nagrody książkowe.




Rys. 12




Rys. 13

Życzymy wytrwałości i miłej zabawy przy klejeniu bryłek. Na koniec jeszcze pytanie: dlaczego właściwie opisane w tekście kompozycje to krewni stelli octanguli z poprzedniego numeru?

*Piotr Pawlikowski*

## Zmarł H.S.M. Coxeter

31 marca 2003 r. w Toronto zmarł Harold Scott MacDonald Coxeter (dla znajomych po prostu Donald), chyba ostatni wybitny geometra zajmujący się problemami zrozumiałymi dla szerokiego kręgu odbiorców. Można powiedzieć, że w przybliżeniu żył cały wiek XX (urodził się 9 lutego 1907 r. w Londynie). Swoje prace naukowe publikował począwszy od roku 1928 niemal do końca życia.

Coxeter badał regularne bryły w przestrzeniach o dowolnym wymiarze – np. bryły platońskie lub archimedesowe* – a także parkietaże przestrzeni za pomocą takich brył. Interesowały go też grafy o wielkiej liczbie wewnętrznych symetrii oraz własności zbiorów wszystkich symetrii rozmaitych obiektów – tzw. grup symetrii. Najważniejszym pojęciem wprowadzonym przez Coxetera, znanym obecnie niemal każdemu matematykowi, jest pojęcie grupy Coxetera, które w abstrakcyjny sposób uogólnia idee związane z symetriami w kalejdoskopie.

Coxeter napisał wiele książek prezentujących jego ulubione zagadnienia geometryczne: wielościany, symetrie, przestrzenie nieeuklidesowe, rozmaite rodzaje przekształceń. W języku polskim ukazała się jego słynna książka pt. *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*.

* Wielościany platońskie – czyli foremne – mają wszystkie ściany będące jednakowymi wielokątami foremnymi i wszystkie naroża przystające. Wielościany archimedesowe – czyli półforemne – mają wszystkie ściany będące wielokątami foremnymi (niekoniecznie jednakowymi) i wszystkie naroża przystające.

# Między nami, szperaczami

# Wyłowione z sieci

### Wirtualny Wszechświat – Matematyka

http://www.wiw.pl/matematyka/

W wirtualnej bibliotece można zapoznać się z fragmentami książek matematycznych oraz wybranym artykułami, które ukazały się w miesięczniku „Delta" od początku jego istnienia aż do dziś (to jest przez prawie 30 lat). Serwis zawiera m.in. 17 ciekawych twierdzeń matematyki klasycznej i współczesnej, czyli wersję elektroniczną książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody *Diamenty matematyki*. W dziale poświęconym polskim matematykom można znaleźć biogramy ponad 20 z nich.

### Absolut Matematyki

http://atraktor.ask33.net/

Strona stworzona przez studenta Politechniki Warszawskiej. Zawiera m.in. pokaźną galerię fraktali oraz interesujący dział „Książki matematyczne". Wśród kilkudziesięciu tytułów można znaleźć naprawdę ciekawe pozycje w plikach pdf umożliwiających przeglądanie na ekranie komputera.

### Epsilon – internetowy serwis matematyczny

http://www.epsilon.kim.pl/

Można tu znaleźć zarówno „poważne" materiały, jak i pobawić się matematyką. Strona zawiera wiele zagadek logicznych i zaskakujących sofizmatów. Można także zmierzyć się tu z zadaniami z Mensy oraz z krakowskich Międzyszkolnych Zawodów Matematycznych (ponad 350 zadań dla szkół średnich) i egzaminów wstępnych na AGH, Politechnikę Krakowską i Uniwersytet Warszawski.

### Al Zimmermann's Programming Contests

http://www.members.aol.com/bitzenbeitz/Contests/

Mimo że konkursy noszą nazwę programistycznych, aby wziąć w nich udział, nie trzeba być ekspertem od programowania. Zadania można rozwiązać przy pomocy komputera lub ołówkiem na kartce papieru. Problemy nie są trudne. Łatwo znaleźć jakieś rozwiązanie, jednak niekoniecznie będzie ono najlepsze, a tylko za takie przewidziana jest nagroda – 500 dolarów. Konkursy ogłaszane są raz albo dwa razy w roku. Aktualny dotyczy wielościanów. Trzeba znaleźć jak najwięcej wielościanów (od 4-ścianu do 28-ścianu), których ściany są trójkątami, a współrzędne wierzchołków liczbami całkowitymi, i to takimi, że żadne dwa wierzchołki nie mają tych samych współrzędnych $x$, $y$ ani $z$ (tzn. jeśli np. jeden wierzchołek miał pierwszą współrzędną równą 1, to żaden inny nie może mieć pierwszej współrzędnej o tej wartości).

**Powers of 10**

http://www.powersof10.com/

Na stronie można znaleźć porównania różnych wielkości czasu i odległości i niemal namacalnie zrozumieć, co to są naprawdę wielkie i małe liczby. Na przykład odległości rozpoczynają się od $10^{25}$ m (tj. ok. biliona lat świetlnych) – widzimy wielkoskalową strukturę wszechświata, a kończą na $10^{-18}$ m – wielkości porównywalnej ze średnicą najmniejszej cząstki, z której zbudowany jest wszechświat – kwarka.

*wyłowił Wojciech Głodek*

# Forum Czytelników

*Po finale Mistrzostw Polski w GMiL otrzymaliśmy dużo e-maili od jego uczestników. Za wszystkie dziękujemy i zapraszamy do dyskusji. Poniżej prezentujemy kilka opinii dotyczących spraw, które pojawiały się w listach najczęściej.*

Poprzedni pomysł organizowania półfinałów w kilkunastu miastach był lepszy. Wysokie wpisowe, koszty dojazdu do Wrocławia i noclegów na pewno nie sprzyjają rozwojowi tej imprezy. Teraz jest może wygodniej, ale tylko dla organizatorów. (góral)

Najlepszy reprezentant Dolnego Śląska zajął dopiero 6 miejsce w kategorii L1, a mimo to znalazł się w reprezentacji do Paryża, bo mu wojewoda taki wyjazd zafundował. To skandal! Fajnie, że wojewoda dolnośląski ma gest, ale wszyscy powinni mieć jednakowe szanse i najwybitniejszy dolnoślązak mógłby skorzystać z kasy wojewody w przypadku, gdyby nabył prawo wejścia do reprezentacji na obowiązujących wszystkich zasadach. Może w takim razie w ogóle nie robić eliminacji, a miejsca w reprezentacji Polski sprzedać co majętniejszym lokalnym VIP-om? (wyrolowany)

Nie do przyjęcia jest dla mnie postawa organizatorów Mistrzostw, którzy rozdzielają miejsca do Paryża, ale każą sobie samemu szukać pieniędzy na wyjazd (nie dotyczy to zwycięzców, których wyjazd finansowany jest ze środków konkursu – przyp. red.). Przecież zawodnicy wyjeżdżają jako oficjalna reprezentacja Polski, a nie reprezentacja jakiegoś powiatu, czy zakładu pracy. Poza tym komitetowi organizacyjnemu (za którym stoi uczelnia) łatwiej pozyskiwać sponsorów niż indywidualnym osobom. Jak się chce taką imprezę organizować, to powinno się to robić odpowiedzialnie do końca. A poza tym nasi zawodnicy niejednokrotnie pokazali w Paryżu, że są najlepsi. Małysz też raczej nie jeździ na zawody „za swoje", a kadrze piłkarskiej, nawet jeśli nie gra najlepiej, skarb państwa pokrywa koszty udziału w mistrzostwach. Może pan Prezydent i inni notable zamiast na puchary rzuciliby kasą na pokrycie kosztu udziału w mistrzostwach reprezentacji naszych matematyków. Tylko nie może o to wystąpić Jaś Kowalski, a szanowni panowie profesorowie z komitetu organizacyjnego. (nauczyciel)

# Łamanie głowy, czyli burza w mózgu

## Zadania konkursowe

*Otrzymujemy coraz więcej prawidłowych rozwiązań proponowanych w kolejnych konkursach zadań. W lipcu nowa grupa szczęśliwców otrzymuje nagrody pieniężne za rozwiązania zadań z numeru 1/2003. Ich listę drukujemy na stronie 34. Zachęcamy wszystkich do udziału w konkursach i przesyłania propozycji ciekawych zadań. Ponieważ dostajemy wiele listów od uczniów szkół podstawowych, będziemy się starali, aby spora część konkursowych zadań nie wymagała znajomości zaawansowanej matematyki. Ponadto opis metod rozwiązania niektórych problemów zawsze znajdziecie wewnątrz numeru. Powodzenia!*

***Redakcja***

### 1. Malowanie szachownicy

Czy można tak pomalować dwoma kolorami pola szachownicy, aby każde pole graniczyło bokami z dokładnie dwoma w takim samym kolorze jak ono? Jeśli rozwiązań jest więcej, podaj przynajmniej dwa.

### 2. W kinie

Na film *Reksio i tajemnicza buda* przyszło kilkadziesiąt osób, z których dokładnie połowa to panie. W chwilę po rozpoczęciu projekcji weszła jeszcze jedna pani i wtedy stanowiły one, po zaokrągleniu do części dziesiątych, 51,3% widzów. Ile osób przyszło do kina?

### 3. Podział prostokąta

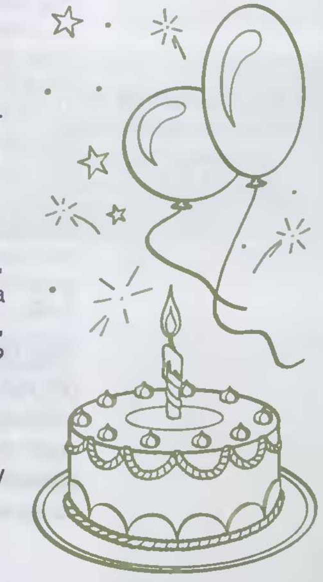
Na ile sposobów można za pomocą jednego cięcia wzdłuż prostej podzielić prostokąt na dwie identyczne części?

### 4. Imieniny

Na przyjęciu imieninowym byli: Alicja, Barbara, Czesława, Dorota, Edward, Franek, Gerwazy i Hubert. Są to 4 małżeństwa. W ostatnim tańcu Basia tańczyła z Edwardem, Alicja z mężem Doroty, Czesława – z mężem Alicji, Franek – z żoną Huberta, a Hubert z żoną Edwarda. Kto jest czyim mężem?

### 5. Wycinanki

Czy z papierowego koła o średnicy 25 cm można wyciąć dwa kwadraty o boku 10 cm i jedno koło o średnicy 10 cm?



## 6. Same jedynki

Na tablicy napisano obok siebie 2003 jedynki. Między każde dwie kolejne należy wstawić plus lub minus. Czy można w ten sposób uzyskać działanie o wyniku 100?

## 7. Rodzina, ach, rodzina

Jeśli z dwóch mężczyzn każdy weźmie za żonę siostrę drugiego, to jakie będzie pokrewieństwo miedzy ich synami?

## 8. Wysokogórska wyprawa

Trzej przyjaciele wyjechali na wyprawę w Himalaje. Zapytani po powrocie, ile kosztował ich ten wyjazd, odpowiedzieli:
Arnold: 0,4 tego, co w sumie dwóch pozostałych.
Błażej: 0,5 tego, co w sumie dwóch pozostałych.
Cezary: 0,6 tego, co w sumie dwóch pozostałych.
Czy wszyscy powiedzieli prawdę?

## 9. Płytki na szachownicy

Czy szachownicę z wyciętymi rogami można pokryć płytkami o wymiarach 1×4 pola?

## 10. Zaprzyjaźnione miesiące

W pewnym roku trzy miesiące zaczynają się tym samym dniem tygodnia. Czy w następnym roku mogą zdarzyć się dwa miesiące rozpoczynające się też tym dniem tygodnia?

## 11. Sprawiedliwy podział

Jak podzielić koło na 9 części o równych polach używając tylko cyrkla i linijki?

## 12. Głoskowa łamigłowa

Głoski to dźwięki mowy. Dzielą się na samogłoski i spółgłoski. Samogłoski to głoski sylabotwórcze.

W każdym z następujących zdań :

A. Zdanie B zawiera tylko ..... spółgłosek.

B. Ale A ma ..... samogłosek.

brakuje jednego słowa. Należy uzupełnić każde z tych zdań tym samym słowem (liczebnikiem), tak aby oba zdania były prawdziwe.

## 13. Gra w berety

Trzej matematycy grają w następującą grę: każdy zakłada na głowę beret, którego nie widzi, ale po ich nałożeniu gracze widzą się nawzajem. Berety są czerwone i zielone, przy czym wszyscy wiedzą, że przynajmniej jeden jest zielony. Na dany znak gracze jednocześnie mówią, czy już wiedzą, jakiego koloru beret mają na głowie. W dwóch pierwszych rundach żaden gracz nie wiedział. Jakie berety mieli na głowach?



## 14. Do kanału

Dlaczego pokrywy studzienek kanalizacyjnych mają kształt koła, a nie np. kwadratu?

## 15. Podział sześcianu

Sześcian dzielimy na 6 przystających ostrosłupów o podstawach będących ścianami tego sześcianu i wspólnym wierzchołku w środku symetrii sześcianu. Następnie ostrosłupy te naklejamy podstawami na ściany sześcianu przystającego do wyjściowego. Ile ścian ma otrzymana bryła?

Za pomysły zadań wykorzystanych w tym numerze dziękujemy Jerzemu Janowiczowi, Ryszardowi Rudnickiemu, Lechowi Stawikowskiemu i Michałowi Śliwińskiemu.

# Wyniki i podpowiedzi

## Rozwiązania zadań konkursowych z numeru 1/2003

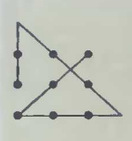
**1)** Rzekł Twardowski... 7 groszy. **2)** Kryptogram. Rys. 1. **3)** Żarówki w piwnicy. Włączamy 1, czekamy chwilę i wyłączamy. Potem włączamy 2 i przechodzimy do drugiego pomieszczenia. Jeśli żarówka się świeci, włącza ją 2, jeśli nie i jest ciepła – 1, a jeśli zimna to 3. **4)** Algebraf. Rys. 2. **5)** Po przyjęciu. 16 osób. **6)** Koperty. Kopertę otwartą można narysować zaczynając z jednego dolnego rogu, a kończąc w drugim. Koperty zamkniętej nie da się narysować, bo w 4 punktach schodzi się nieparzysta liczba linii. Punkty te musimy odwiedzić trzykrotnie, lecz już w pierwszym odwiedzanym po raz trzeci rysunek się urwie (do punktu można dojść, ale nie ma drogi, którą można wyjść). **7)** Przepowiednia Nostradamusa. 36 dat, najbliższe to 2307 i 2417. **8)** Dzieci matematyka (2). Dzieci mają 1, 6, 6 lat, a rozmowa była trzynastego. **9)** Rodzinne grzybobranie. Marek był synem Tomasza i znalazł 11 prawdziwków. **10)** Rogacze z Bagdadu. W mieście były cztery niewierne żony. Wtedy ich mężowie dowiedzą się o tym w czwartą noc. **i)** Gdyby w mieście była tylko jedna niewierna żona, zginęłaby pierwszej nocy (jej mąż wie, że inne są wierne, więc niewierną musi być jego własna żona). **ii)** Gdyby w mieście były dwie niewierne żony (powiedzmy panie A i B), obie zginęłyby drugiej nocy, bo pan A wie, że pani B jest niewierna, a pozostałe są wierne, ale nie wie nic o własnej żonie. Pan B jednak wie, że pani A jest niewierna. Gdyby była wierna, to B zabiłby swoją żonę pierwszej nocy (przypadek **i**). Skoro tego nie zrobił, pan A domyślił się, że jego własna żona jest niewierna. **iii)** Gdyby w mieście były trzy niewierne żony (powiedzmy panie A, B i C), to zginęłyby wszystkie trzeciej nocy, bowiem pan A wie, że panie B i C są niewierne, a pozostałe są wierne, ale nic nie wie o własnej żonie. Gdyby żona pana A była wierna, panie B i C zginęłyby drugiej nocy (przypadek **ii**), skoro tak się nie stało, pan A domyślił się, że jego żona jest niewierna itd. **11)** Łamanie linii. Rys. 3. **12)** Wyciąg krzesełkowy. Krzesełko nr 24. **13)** Tasowanie kart. Trójkę zamieniamy z szóstką, którą „po drodze" odwracamy „do góry nogami". **14)** Wielokąt. 19996 × 180° **15)** Upominek. 20 zł.

```
  8 8 5
  4 8 8
+ 4 4 8 5
  5 8 5 8
```

Rys. 1

```
89 × 83 = 7387
+    −    +
7518 : 42 = 179
7607 − 41 = 7566
```

Rys. 2



Rys. 3

# Wyniki konkursu z numeru 1/2003

Tym razem najlepsi rozwiązali tylko 12 z 15 konkursowych zadań. Nikomu nie udało się rozwiązać zadania o rogaczach z Bagdadu. Nagrody otrzymują:

200 zł – **Michał PASZENDA**, Żory (12 zad.),

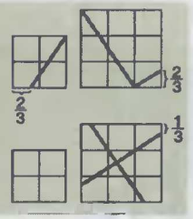
100 zł – **Dariusz CHUDZIA** Wrocław (12 zad.), **Kajetan STATKIEWICZ** Wrocław (12 zad.), **Patryk GRABOWSKI** Łódź (11 zad.), **Teresa SODZAWICZNY** Ruda Śląska (11 zad.), **Anna WĘGRZYN** Mniów (11 zad.),

50 zł – **Janusz SZCZĘSNY** Bielawa (11 zad.), **Ewelina GALIK** Brukalice (11 zad.), **Sławomir DOBEK** Warszawa (10 zad.), **Mateusz LEWARTOWSKI** Dębica (10 zad.), **Joanna HELUSZKA** Kłodzko (9 zad.), **Beata DYMCZYK** Wrocław (9 zad.), **Urszula KASPERSKA** Wrocław (8 zad.), **Michał ALEKSANDROWICZ** Płock (8 zad.), **Sławomir KOSZELEW** Białystok (6 zad.), **Zbigniew MINKINA** Wrocław (6 zad.).

# Rozwiązania z numeru 2/2003

## Zadania z II etapu eliminacji Mistrzostw w GMiL

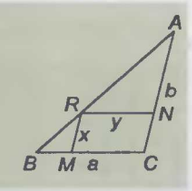
**1)** Grzeczne dzieci. 17 chłopców. **2)** Tajemniczy palindrom. 1881. **3)** Konkurs matematyczny. 11, 10, 7 lub 11, 9, 8. **4)** Podział kwadratu. O 36 cm$^2$. **5)** Sześcienna suma. 43–55. **6)** Podzbiór setki. 34 **7)** Układanie kwadratu. Możliwe sposoby podziału kwadratu na pięć wielokątów przedstawia rysunek obok.




Lista nagrodzonych w następnym numerze.

## Konkurs *Matematyka bez granic*

**1a)** Zauważamy, że $\frac{|BR|+|AR|}{|AB|}=1$. Z twierdzenia Talesa mamy $\frac{|BR|}{|AB|}=\frac{x}{b}$, $\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{y}{a}$, skąd otrzymujemy $\frac{|BR|}{|AB|}+\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$. Obwód czworokąta to $L_{CMRN}=2(x+y)$. Korzystając z nierówności dla długości boków otrzymujemy $\frac{x+y}{b}\le\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1\Rightarrow x+y\le b$, $\frac{x+y}{a}\ge\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1\Rightarrow$ $\Rightarrow x+y\ge a$. Co oznacza, że $2a\le L_{CMRN}\le 2b$.




**b)** Pole czworokąta możemy wyznaczyć następująco $P_{CMRN}=xy\sin C=\frac{x}{b}\cdot\frac{y}{a}ab\sin C$. Łatwo można też dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi nierówność $\alpha\beta\le\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2$. Podstawiając $\alpha=\frac{x}{b}$ i $\beta=\frac{y}{a}$ oraz korzystając z faktu $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ (patrz 1a) widać, że maksymalna wartość pola to $\frac{1}{4}ab\sin C$, czyli $\frac{1}{2}$ pola wyjściowego trójkąta. Tak jest dla $R$ będącego środkiem boku $AB$.

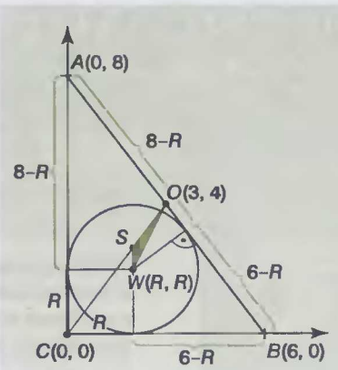
**2)** Przekształcamy lewą stronę równości $\sqrt{2(x-2)^2+1}=\cos\pi x$. Zauważamy, że dla dowolnego $x$ lewa strona jest równa 1 lub większa od 1, a prawa strona jest co najwyżej równa 1. Zatem równość zachodzi tylko, gdy obie strony są jedynkami, a tak jest dla $x=2$.

**3)** Niech $P_1\ge P_2\ge P_3$. Wykażmy, że $P_1\ge 162$. Można sprawdzić, że $153^3<10!<154^3$, ale $P_1P_2P_3=10!$, co daje $P_1\ge 154$. Jednak $P_1$ nie może równać się 154, 155, 156, 157, 158 ani 159, gdyż każda z tych liczb posiada dzielnik pierwszy, większy od 7 (a 10! nie ma takiego dzielnika). Zatem $P_1\ge 160$. Jeśli $P_1=160$, to $P_2P_3=\frac{10!}{160}=2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7=22\,680$. Zatem $P_2^2\ge 22\,680\Rightarrow P_2\ge 151$. Ale $P_2$ nie może równać się 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158 ani 159, ponieważ każda z tych liczb, posiada dzielnik pierwszy, większy od 7. Nie jest także możliwe, aby $P_1=P_2=160$, ponieważ $160^2\nmid 10!$. Ponieważ $P_2\le P_1$, w tym przypadku otrzymujemy sprzeczność. Zatem $P_1>160$, ale $161=7\cdot 23$, co dowodzi, że $P_1\ge 162$. Przykład rozbicia na zbiory {1; 3; 6; 9}, {2; 8; 10}, {4; 5; 7} pokazuje, że liczba 162 nie może być zamieniona na większą.



**4)** Niech $f(x)=(x-b)(x-c)$. Wtedy $f(a)\ge 0$; $f(b)=0$; $f(c)=0$; $f(d)\ge 0\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\ge 0$. Podstawiając do tej nierówności odpowiednie wartości otrzymujemy $a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)(b+c)+4bc\ge 0$. Podstawiając dane z zadania mamy więc $4+4bc\ge 0\Leftrightarrow bc\ge -1$.

**5)** Boki $AW$ i $BW$ trójkąta $ABW$ to fragmenty dwusiecznych kątów $A$ i $B$ trójkąta $ABC$. Z sumy kątów trójkąta $ABW$ mamy: $\frac{1}{2}\sphericalangle A+\frac{1}{2}\sphericalangle B=45°$, czyli $\sphericalangle A+\sphericalangle B=90°$. To znaczy że trójkąt $ABC$ jest prostokątny. Oznaczmy długości jego boków przez $a$, $a+q$, $a+2q$ (gdzie $a$ i $q$ są dodatnie). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy: $a^2+(a+q)^2=(a+2q)^2$, co po przekształceniach daje $(a-3q)(a+q)=0$. Zatem $a=3q$ (bo $a=-q$ wykluczamy). Wiemy więc, że boki trójkąta $ABC$ to $3q$, $4q$ i $5q$. W trójkącie prostokątnym środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej, czyli $r=\frac{5q}{2}$. Można stąd wyliczyć $q=\frac{2r}{5}$, gdzie $r$ jest liczbą pierwszą. Zatem boki trójkąta $ABC$ mają długości $\frac{6r}{5}$, $\frac{8r}{5}$ i $2r$. Pole trójkąta $OWS$ obliczymy np. dla $r=5$. Wtedy boki trójkąta mają długości 6, 8, 10. Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku obok i wyznaczmy współrzędne wierzchołków. Promień okręgu wpisanego $R$ spełnia zależność $(8-R)+(6-R)=10$, czyli $R=2$. Zatem $W$ ma współrzędne (2, 2). Punkt $S$ leży w $\frac{2}{3}$ odcinka $CO$, więc ma współrzędne $(\frac{2}{3}\cdot 3,\frac{2}{3}\cdot 4)=(2,2\frac{2}{3})$. Znając położenie wierzchołków wyliczamy, że pole trójkąta $WOS$ wynosi w tym przypadku $\frac{1}{3}$. Ogólnie $\frac{r^2}{75}$.

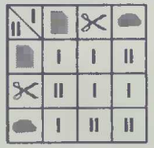



## Problemy z artykułu *Gry w skreślanki*

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

Problem 1. Gry losowe: *kości* oraz *papier–nożyce–kamień*, gry sprawiedliwe: *warcaby*, *go*, gry-mixy pozostałe.

Problem 2. W grze wystarczy „zaznaczyć" pozycje wygrywające. 100 będzie mógł powiedzieć ten z graczy, który pierwszy powie 89 (wtedy przeciwnik musi powiedzieć co najmniej 90, ale najwyżej 99, co prowadzi do jego przegranej); ten zaś będzie mógł powiedzieć 89, kto poprzednio wymieni 78 itd. W ten sposób otrzymamy ciąg liczb, których wymienianie w trakcie gry zapewnia zwycięstwo. Ponieważ ciąg ten zaczyna się od jedynki, strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę.

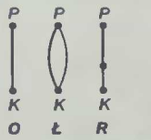


Rys. 1

Problem 3. Jest to gra strategiczna. Graczem uprzywilejowanym jest rozpoczynający grę (A). W pierwszym ruchu kładzie na środku stołu dowolną monetę (zakładamy, że blat stołu ma środek symetrii), a później odpowiada na ruchy przeciwnika (B) układaniem takiej samej jak B monety w pozycji środkowosymetrycznej. A nie może przegrać, bo jeśli B wykonał swój ruch, to miejsce położone symetrycznie jest jeszcze wolne, więc A ma możliwość wykonania ruchu.

Problem 4. Kasujemy remisy w grze losowej, np. *papier–nożyce–kamień* (np. wg tabeli podanej na rys. 1 – numer na skrzyżowaniu wiersza i kolumny oznacza zwycięzcę).

Problem 5. a) Gra w monety (patrz Problem 3). b) Gra w monety na tarasie kawiarni (na stole z parasolem). Gracz wykonujący swój pierwszy ruch jako drugi odpowiada na ruchy gracza rozpoczynającego wg opisanej wyżej strategii.

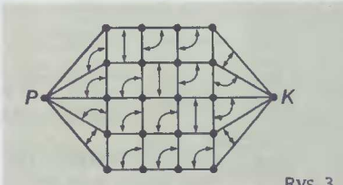



Rys. 2

Problem 7 i 12. Na planszy 2 × 3 *Brigde-it* jest O-grą. Dla większych plansz też, ale sprawdzenie tego jest skomplikowane.

Problem 9. Rys. 2. Problem 10. O, R, R.

Problem 11. Jeśli $P$ i $K$ są wierzchołkami sąsiednimi, to skreślanka rozgrywana na drzewie jest O-grą, w przeciwnym wypadku jest to $R$-gra (w drzewie pomiędzy każdymi wierzchołkami istnieje dokładnie jedna droga, wystarczy ją rozciąć w dowolnym miejscu).

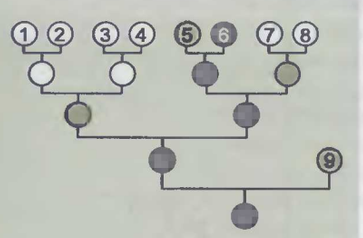



Rys. 3

Problem 14. Jeden z możliwych sposobów gry przedstawia rys. 3. Gdy gracz rozcinający usuwa krawędź, na którą wskazuje jeden koniec strzałki, gracz łączący powinien ściągnąć krawędź, na którą wskazuje drugi jej koniec.

Zadanie dla Czytelników. Opis strategii *gry w kupki* (*fan-tan*) można znaleźć w książce Szczepana Jeleńskiego *Śladami Pitagorasa* (WSiP Warszawa 1988).

## Zadania z artykułu *Fałszywe monety*




Rozwiązanie większości zadań można znaleźć w artykule *Trzynasta moneta* na stronie 22. Tu podajemy rozwiązanie nietypowego zadania nr 4.

**a)** Numerujemy monety liczbami od 1 do 9. Obok przedstawiono diagram ważeń w przypadku, gdy najcięższa moneta ma numer 6. Po wykonaniu czterech ważeń z pierwszego wiersza wpisujemy w drugim wierszu numery cięższych monet z poszczególnych par. Postępowanie to kontynuujemy aż do uzyskania najcięższej monety. Wystarczyło do tego osiem ważeń. Aby wyznaczyć drugą pod względem ciężaru monetę, wystarczy porównać w analogiczny sposób cztery monety, które „przegrały" z najcięższą w bezpośrednich ważeniach (pola zielone). W tym celu musimy wykonać trzy dodatkowe ważenia, co daje łącznie jedenaście ważeń.

**b)** Rozwiązanie według schematu przedstawionego poprzednio daje 8 + 4 + 2 + 1 = 15 ważeń w celu uzyskania najcięższej monety. Pozostają jeszcze cztery monety, które „przegrały" z najcięższą w bezpośrednich ważeniach. Wśród nich znajduje się druga pod względem ciężaru. Musimy znowu wykonać trzy dodatkowe ważenia, co daje łącznie osiemnaście ważeń.

### Errata do artykułu *Fałszywe monety*

W rozwiązaniu zadania 5 b) powinno być „dzielimy na 3 grupy po 4 monety" (nie na 4 po 4).

## Zadania z artykułu *Mocna reszta*

Zadanie 1. Nie istnieją liczby spełniające równanie. Lewa strona daje z dzielenia przez 4 resztę 0 lub 1, a prawa 2 lub 3.

Zadanie 2. Reszty z dzielenia kwadratów liczb całkowitych przez 3 to 0 lub 1. Stosując twierdzenie Pitagorasa widać, że reszty z dzielenia kwadratów długości przyprostokątnych nie mogą być jednocześnie 1, więc jedna z nich musi być 0. Wtedy długość tej przyprostokątnej jest wielokrotnością 3.

Lista nagrodzonych w następnym numerze

## Zadanie z artykułu *Stella octangula*

Stella octangula powstaje w wyniku przedłużania ścian ośmiościanu foremnego, lub inaczej – powstaje w wyniku doklejenia do każdej ściany ośmiościanu foremnego czworościanu foremnego.

## Zadania primaaprilisowe

Strona 11. Widocznie w windzie pozostały (–4) osoby. Strona 18. Uwaga na dzielenie przez zero. Strona 21. Wystarczy, aby promień koła $R$ wynosił $\sqrt{2}r$ lub $\frac{r^2}{2}$. Strona 23. 2 zł są w kasie.

**Kupon konkursowy „MMM" 3/2003**

**Liczba rozwiązań** .....

Wśród Czytelników, którzy do końca września 2003 nadeślą prawidłowe rozwiązania zadań konkursowych rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązania przynajmniej 12 zadań) – **200 zł,**

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) – po **100 zł**,

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) – po **50 zł**.

Rozwiązania w kopertach z naklejonym kuponem konkursowym należy przesyłać na adres redakcji.

Na kuponie prosimy wpisać liczbę rozwiązanych zadań.

# Matematyk w podróży

*W przedziale pociągu jechała grupa matematyków i ekonomistów. Matematycy kupili jeden bilet, a zanim przyszedł konduktor zamknęli się w toalecie. Gdy konduktor zapukał, jeden z matematyków uchylił drzwi i podał bilet do kontroli. W drodze powrotnej ekonomiści postanowili podróżować tak samo. Gdy zbliżał się konduktor, weszli do toalety i na odgłos pukania podali bilet do kontroli. Ale to pukali matematycy, którzy wzięli bilet i poszli zamknąć się do następnej toalety.*

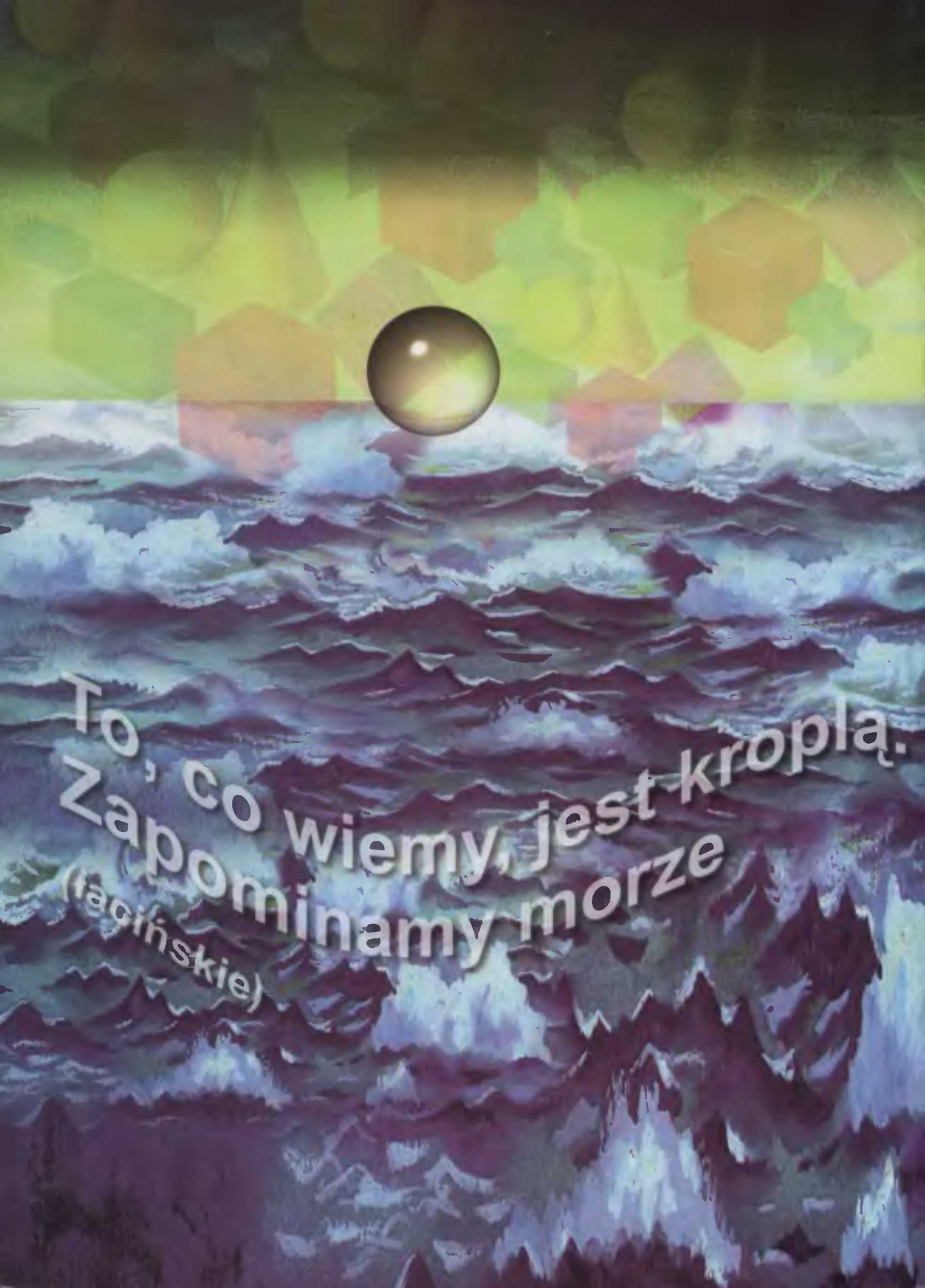
*W jednym przedziale pociągu w Szwajcarii spotykają się: fizyk doświadczalny, fizyk teoretyk i matematyk. Przez okno zobaczyli łąkę, na której pasły się trzy łaciate krowy. Fizyk doświadczalny skomentował to następująco:*

*– W Szwajcarii wszystkie krowy są łaciate.*

*– O, przepraszam! W Szwajcarii są łaciate krowy – poprawił go kolega-teoretyk, a matematyk zawyrokował:*

*– W Szwajcarii istnieją trzy krowy, które są łaciate przynajmniej z jednej strony.*

*Jeśli lecąc samolotem masz ochotę na pogawędkę, na pytanie sąsiada „Czym się pan zajmuje?" odpowiedz: „Jestem prawnikiem". Jeśli pragniesz ciszy i spokoju odpowiedz: „Jestem matematykiem".*


To, co wiemy, jest kroplą.
Zapominamy morze
(tajlandzkie)