kwartalnik nr 3 (8) lipiec 2004 ISSN 1643-9481 indeks 372366 cena 5 zł (0% VAT)

# mmm

magazyn miłośników matematyki

# Matematyczne marsze na orientację

Serce zawodów – sekretariat

Sędzia Główny przypomina regulamin

Na starcie w Łagiewnikach...

...i na mecie

Na górę (Kościelną)!

**Szum lasu (ile to decybeli i jaki procent normy dla hałasu miejskiego?), promienie słońca, czyste powietrze (ile tlenu wdychamy przez godzinę biegając po lesie?), tu motyl (czy lecąc w linii prostej ma szansę nas przegonić w drodze do punktu kontrolnego nr 48?), tam mrowisko (ma kształt stożka o wysokości 8 i średnicy 12 dm, jaką ma objętość?) – matematyki można uczyć się nie tylko w szkolnej ławce. Przyjemniej przelicza się skale i dodaje kąty, jeśli za chwilę można zweryfikować te obliczenia i konstrukcje znajdując ukryty kolejny punkt kontrolny... A na koniec nagrody dla najlepszych i wspólne ognisko.**
**Czytaj w dziale „Matematyczne zmagania" s. 7.**

Za każdym razem wychodzi inaczej

Gdzieś tu musi być ten perforator

Ale go schowali!

A to nasz wynik. Nie jest zły!

To już koniec zawodów

Zwycięzcy seniorzy...

...i juniorzy

Fot.: Wojciech Obremski, Piotr Polakowski

## W numerze:


**Matematyczne zmagania**
*Paryż zaprasza mistrzów* ..... 2
M. Mikołajczyk, M. Paszyńska
*Matematyczne marsze na orientację* .... 7
Michał Kremzer
*Pytania (nieco) przewrotne* ..... 11
**Z życia liczb**
*Konkurs noworoczny rozstrzygnięty* (MŚ) . 12
*Kram z odkryciami* ..... 14
**Etiudy geometryczne**
Stanisław Fudali
*Obracany* ..... 15
**Samouczek zadaniowy**
Lech Stawikowski
*Podwórkowe gonitwy* ..... 18
**Z matematycznego lamusa**
Małgorzata Mikołajczyk
*Kalendarz olimpijski* ..... 23
**Matematyka na klawiszach**
M. Mikołajczyk, K. Omiljanowski
*Igrzyska na ekranie* ..... 26
**Zrób sobie bryłkę**
Piotr Pawlikowski
*Gwiazdy z gwiazd dwunastu (2)* ..... 28
**Z notatnika starego belfra**
Adam Smólski
*Równanie w dół* ..... 31
**Między nami, szperaczami**
*Forum Czytelników* ..... 33
**Łamanie głowy, czyli burza w mózgu**
*Zadania konkursowe* ..... 34
*Wyniki i podpowiedzi* ..... 37


**Ponadto nasze stałe rubryki:**
Sztafeta pokoleń, czyli 5–10–15–20 (s. 17)
Wyłowione z sieci (s. 17, 21, 31 i 33)

*Drodzy Czytelnicy!*

*W numerze styczniowym ogłosiliśmy „Konkurs noworoczny" związany z liczbą 2004 (jego rozstrzygnięcie znajdziecie na s. 12). Rok 2004 jest szczególny – jak każdy przestępny jest rokiem olimpijskim. Natomiast w krajach Unii Europejskiej obchodzony jest jako „rok edukacji przez sport", dlatego tematyka sportowa zdominowała znaczną część tego numeru MMM.*
*Przedstawiamy m.in. pomysł na połączenie zawodów matematycznych, sportowych i rekreacji na świeżym powietrzu – matematyczne marsze na orientację organizowane w Łodzi i we Wrocławiu (zdjęcia na okładce obok). Jeśli podobne imprezy odbywają się w innych miastach, prosimy ich organizatorów o kontakt z redakcją.*
*Artykułem „Igrzyska na ekranie" nie namawiamy bynajmniej do biernego śledzenia wyczynów sportowców przed telewizorem, ale do intelektualnych zmagań z wykorzystaniem kalkulatora graficznego. Tym samym inicjujemy nowy dział: „Matematyka na klawiszach".*
*Z Waszych listów wynika, że z przyjemnością rozwiązaliście π-busy z ostatniego numeru. Tym razem proponujemy rebusy sportowe.*
*Czytelnikom, którzy zwrócili nam uwagę na rozmaite błędy w poprzednich numerach, dziękujemy, a wszystkich za nie przepraszamy. Erraty zamieszczamy na naszej stronie internetowej. Kończąc życzymy wszystkim wspaniałego wakacyjnego wypoczynku i miłej lektury.*

***Redakcja***


**mmm Magazyn Miłośników Matematyki 3/2004**
http://www.mmm.ig.pl
ISSN 1643-9481, NAKŁAD 5000 egz.
WYDAWCA: Oficyna Wydawnicza ATUT – Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe



**RADA REDAKCYJNA**
Rościsław Rabczuk, Zbigniew Romanowicz, Zbigniew Skoczylas
**REDAKCJA**
Małgorzata Mikołajczyk (redaktor naczelny), Michał Śliwiński, Wojciech Głodek (strona WWW), Krzysztof Skwark (menedżer tytułu)
**PROJEKT OKŁADKI**
Adam Łowczycki, Ewa Karolczak
**SKŁAD I ŁAMANIE**
Sigma – Ewa Karolczak
53-149 Wrocław, ul. Racławicka 11/6


**ADRES REDAKCJI**
Magazyn Miłośników Matematyki
50-010 Wrocław, Podwale 62
tel. (0-71) 342 20 56
e-mail: mmm@atut.ig.pl

**WARUNKI PRENUMERATY**
Koszt prenumeraty równa się liczbie zamawianych numerów pisma pomnożonej przez cenę pojedynczego numeru (5 zł). Każda wpłata powinna mieć adnotację, których numerów dotyczy, oraz zawierać adres zamawiającego. Można zamawiać również numery archiwalne.
**Należność prosimy wpłacać na konto:**
Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
50-010 Wrocław, Podwale 62
BZ WBK I O/Wrocław
**24 1090 2398 0000 0006 0802 5123**

**MMM** dostępny jest w sprzedaży na terenie całego kraju w salonach prasowych RUCH, EMPiK oraz w punktach patronackich.

**CENNIK REKLAM**
- Okładka (pełny kolor): II strona – 3000 zł, III strona – 2000 zł;
- wnętrze (2 kolory): 1 strona – 1000 zł, 1/2 strony – 600 zł, 1/3 strony – 400 zł.

Podane kwoty są cenami netto, należy doliczyć 22% VAT.
Redakcja nie odpowiada za treść reklam i ogłoszeń.

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadsyłanych tekstów. Tytuły pochodzą od redakcji. Niezamówionych materiałów nie zwracamy.
Zapraszamy do współpracy! Redakcja

# Matematyczne zmagania

# Paryż zaprasza mistrzów

*W dniach 15 i 16 maja odbyły się we Wrocławiu finały II Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych, będące jednocześnie eliminacjami do XVIII Mistrzostw Międzynarodowych. Z 1471 uczestników I etapu korespondencyjnego jury zakwalifikowało do II etapu (również korespondencyjnego) 1206 osób, a do finałów 833 osoby. Poniżej prezentujemy przebieg finałowych zmagań, ich zwycięzców oraz wybór zadań.*

*Więcej informacji:* ***http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html***

Tradycyjnie w mistrzostwach uczestnicy podzieleni byli na 8 kategorii wiekowych i zawodowych. Dane liczbowe zebrane w poniższej tabeli ilustrują przebieg finałowych rozgrywek.

| kategoria | zakwalifikowano do finału | liczba uczestników I części finału | liczba uczestników II części finału |
|---|---|---|---|
| CE (kl. III SP) | 27 | 22 | 22 |
| CM (kl. IV SP) | 39 | 35 | 24 |
| C1 (kl. V i VI SP) | 155 | 145 | 92 |
| C2 (gimnazja) | 278 | 249 | 117 |
| L1 (szkoły ponadgimnazjalne) | 237 | 211 | 77 |
| L2 (studenci, szkoły pomaturalne) | 32 | 26 | 19 |
| GP (dorośli amatorzy) | 33 | 28 | 14 |
| HC (zawodowi matematycy) | 31 | 31 | 18 |
| **RAZEM** | **832** | **747** | **383** |

Zwycięzcy poszczególnych kategorii oprócz nagród rzeczowych (m.in. wysokiej klasy skanera i cyfrowych aparatów fotograficznych) otrzymali puchary ufundowane przez: prezydenta RP (C2), premiera RP (L1), marszałka Sejmu RP (GP, HC), ministra edukacji narodowej i sportu (CE), wojewodę dolnośląskiego (C1), prezydenta miasta Wrocławia (CM) i rektora PWr. (L2). Ponadto nasz współpracownik, Lech Stawikowski, zdobywca II miejsca w kategorii L1, otrzymał nagrodę dla najlepszego dolnoślązaka ufundowaną przez marszałka województwa.

Na następnej stronie podajemy nazwiska osób, które uplasowały się najwyżej w łącznej (dwudniowej) klasyfikacji finału mistrzostw. Spośród nich zostanie wyłoniona reprezentacja Polski na zawody międzynarodowe w sierpniu. Bardzo dobre wyniki finałów krajowych pozwalają prognozować kolejny polski sukces w Paryżu. Relację z tej imprezy przedstawimy w następnym numerze.



**Klasyfikacja finałowa** – podajemy nazwiska osób, które w konkursie zrobiły maksymalną liczbę zadań lub (poza kategorią C2) o jedno mniej.

1. Radosław Serafin (SP 118 Wrocław)
2. Jarosław Dąbrowski (SP Miękinia)
3. Bartosz Matysiak (SP Jedlińsk)
4. Aleksandra Żurawik (SP 61 Wrocław)
5. Karolina Lech (SSP 1 Lublin)
6. Tomasz Skalski (SP 76 Wrocław)
7. Piotr Gwiździel (SP 2 Syców)
8. Krzysztof Stolorz (SP 47 Szczecin)

1. Aleksandra Seweryn (SP 21 Białystok)
2. Michalina Sieradzka (SP 93 Wrocław)
3. Paweł Popławski (SP 46 Wrocław)
4. Maciej Pawlikowski (SP 1 Kluczbork)
5. Zleksandra Zabrocka (SP 2 Miastko)
6. Maciej Dzianowicz (SP 5 Chorzów)
7. Małgorzata Mielczarek (SP 10 Szczecin)
8. Maciej Dulęba (SP 1 Wrocław)
9. Katarzyna Janocha (SP 3 Mielec)

1. Bernadetta Curyło (SP 7 Zielona Góra)
2. Sławomir Nowak (SP 17 Koszalin)
3. Michał Arndt (SP Łobżenica)
4. Marcin Jędrzejewski (SP 41 ZSI Radom)
5. Cezary Pietruszko (SP 10 Olsztyn)
6. Agata Gniewek (SP 3 Jelenia Góra)
7. Bartosz Łysek (SP 2 Twardogóra)
8. Aleksander Pacion (SP 55 Szczecin)
9. Anna Sosnowska (SP 10 Szczecin)
10. Karol Saja (SP 3 Wrocław)
11. Zuzanna Dziedzic (SP 16 Bielsko-Biała)
12. Anna Lamperska (SP 46 Wrocław)
13. Łukasz Szydełko (SP 16 Pisarzowice)
14. Jakub Seweryn (SP 21 Białystok)
15. Paweł Lipski (SP 41 Gliwice)
16. Piotr Markowski (SP 4 Rawicz)

1. Gabriel Listowski (G 1 Zabrze)
2. Tomasz Kolanowski (SG 20 Warszawa)
3. Łukasz Matera (G Akademickie Toruń)
4. Tomasz Stróżak (G 7 Lublin)
5. Aleksander Kubica (G Bystra)
6. Przemysław Ponikowski (G 2 Radzyń Podl.)
7. Michał Mazurkiewicz (ZSO 13 Gorzów Wlkp.)
8. Sebastian Stępień (G 23 Radom)
9. Maciej Goździk (G 2 Skierniewice)
10. Błażej Bauer (G 22 Warszawa)
11. Mąciej Machulec (ZSO 10 Katowice)
12. Konrad Milczarek ( G 22 Łódź)
13. Marcin Kurczych (G Językowe Kielce)

1. Andrzej Grzywocz (III LO Gdynia)
2. Lech Stawikowski (III LO Wrocław)
3. Patryk Miziuła (VI LO Bydgoszcz)
4. Krzysztof Dorobisz (V LO Kraków)
5. Marcin Bastrzyk (I LO Kluczbork)
6. Michał Pilipczuk (XIV LO Warszawa)
7. Andrzej Grzesik (V LO Kraków)
8. Filip Klawe (VI LO Bydgoszcz)
9. Mateusz Kwiatek (V LO Kraków)
10. Michał Handzlik (ZSO Wadowice)

1. Artur Hibner (AGH Kraków)
2. Jacek Jurewicz (Uniw. Warszawski)
3. Piotr Skibiński (Uniw. Kard. Wyszyńskiego w Warszawie)
4. Przemysław Uznański (Polit. Gdańska)
5. Piotr Kuc (SGH Warszawa)
6. Eryk Kopczyński (Uniw. Warszawski)
7. Joanna Gruszczyńska (Uniw. Wrocławski)

1. Ryszard Luks (inż. elektryk, Siemianowice Śl.)
2. Paweł Kępczyński (rolnik, Warszawa)
3. Jakub Kozłowski (mgr inż. ciepłownictwa, Sosnowiec)

1. Bartłomiej Dyda (matematyk, Wrocław)
2. Grzegorz Stachowiak (informatyk, Wrocław)
3. Paweł Tatarczak (informatyk, Giżycko)
4. Marcin Ciura (informatyk, Gliwice)

Zwycięzcom poszczególnych kategorii przyznano tytuły Mistrzów Polski w Grach Matematycznych i Logicznych. Poznajmy ich.

### Kategoria CE – Radosław Serafin z Wrocławia

Zamiłowaniem do matematyki zaraził go starszy brat. Szczególnie przypadły mu do gustu łamigłówki matematyczne. Jest też zapalonym szachistą (obecnie posiada IV kategorię). Należy do klubu szachowego w Młodzieżowym Domu Kultury i bierze udział w turniejach. Od niedawna interesuje się także brydżem. Jako uczeń trzeciej klasy startował z powodzeniem w „Kangurze", „Alfiku matematycznym" i w „Macie", ale najbardziej dumny jest ze zwycięstwa w Mistrzostwach w GMiL.

### Kategoria CM – Aleksandra Seweryn z Białegostoku

Również poszła w ślady starszego brata – Jakuba – srebrnego medalisty Mistrzostw w GMiL z Paryża w 2002 r. w kategorii CM. Poza matematyką interesuje się muzyką, sztuką i sportem. Gra na pianinie, uczy się języka angielskiego, uprawia siatkówkę, a w wolnych chwilach gra z bratem w tenisa stołowego i słucha muzyki. Jej ulubionym zespołem jest Queen. Jest laureatką konkursów matematycznych i plastycznych. W tym roku w województwie podlaskim wygrała „Kangura" i „Mata", a w „Alfiku matematycznym" była druga. Jej marzeniem jest zwiedzanie najpiękniejszych zakątków świata.

### Kategoria C1 – Bernadetta Curyło z Zielonej Góry

Interesuje się poezją i sportem (ukochany klub to Real Madryt), dużo czyta, głównie książki Lucy Maud Montgomery i Małgorzaty Musierowicz, ale najbardziej fascynuje ją matematyka. Przygoda ta zaczęła się w klasie III SP, gdy po raz pierwszy została laureatką „Kangura". W tym roku sukces ten udało się jej powtórzyć, ale zwycięstwo w Mistrzostwach Polski w GMiL uważa za swoje największe osiągnięcie i zachętę do dalszej pracy. Niepoślednią rolę w tym sukcesie odegrały jej szkolne nauczycielki: Joanna Piotrowska i Krystyna Michalewska oraz opiekunowie miejskiego koła matematycznego „Pitagoras": Sabina Janecka-Mastalerz i Mieczysław Trąd. Ważne jest też wsparcie rodziców i dziadków, którzy w trudnych chwilach zwątpienia potrafią odgonić zniechęcenie.

### Kategoria C2 – Gabriel Listowski z Zabrza

Jest wielokrotnym laureatem konkursów matematycznych, m.in. „Kangura", „Mata" (w tym roku I miejsce w kraju) i „Nudnej Matematyki" (konkurs regionu śląskiego – pisaliśmy o nim w MMM 3/2003) oraz finalistą I Śląskiego Konkursu Matematycznego dla szkół ponadgimnazjalnych. Po ukończeniu gimnazjum zamierza podjąć naukę w I LO w Zabrzu. Kandyduje na stypendystę Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci. Oprócz matematyki interesuje się informatyką, a także karciankami kolekcjonerskimi, w które gra z przyjaciółmi. Jest częstym uczestnikiem różnego rodzaju forów internetowych, chociaż z powodu braku dostępu do sieci z domu korzysta z Internetu tylko w szkole. W przyszłości zamierza zostać informatykiem.

### Kategoria L1 – Andrzej Grzywocz – LO nr III w Gdyni

Pochodzi z Katowic, ale wybrał naukę pod kierunkiem Wojciecha Tomalczyka w klasie matematycznej III LO w Gdyni, do którego jeszcze jako gimnazjalista przyjeżdżał na warsztaty matematyczne. Od najmłodszych lat interesuje się matematyką i informatyką. Jego pierwszymi nauczycielami byli rodzice. Pierwszy raz startował w Mistrzostwach w GMiL w kategorii CM, a pięć lat temu wziął udział w finałach paryskich. Od siedmiu lat jest stypendystą Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci. Jest tegorocznym laureatem Olimpiady Informatycznej. Obecnie zajmuje się sieciami neuronowymi, programowaniem modeli robotów i przygotowaniami do startu w Olimpiadzie Informatycznej Europy Centralnej. Nauczyciele często mówią o nim, że jest wybitnie zdolny i równie leniwy. Interesuje się literaturą piękną (Bułhakow, Topor) i fantastyką (Sapkowski, Tolkien), uprawia narciarstwo i biegi, interesuje się kabaretem.

### Kategoria L2 – Artur Hibner z Bielska-Białej

Jest wychowankiem V LO w Bielsku-Białej, w którym do brania udziału w Mistrzostwach w GMiL zachęcił go nauczyciel matematyki Tomasz Szymczyk. Od tamtej pory startował w zawodach co roku, z coraz większym powodzeniem (w ubiegłym roku zajął III miejsce, a w tym wygrał). Ukończył drugi rok studiów informatycznych na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Jego hobby to komputery, łamigłówki, literatura popularnonaukowa, tenis ziemny (z pewnymi sukcesami na poziomie amatorskim) i słuchanie dobrej muzyki. Bardzo lubi czytać książki Terry'ego Pratchetta.

Ryszard Luks (pierwszy od dołu)

### Kategoria GP – Ryszard Luks z Siemianowic Śląskich

Pana Ryszarda mieliśmy przyjemność przedstawiać jako zwycięzcę tej kategorii w ubiegłym roku. Nic dziwnego. Aż jedenaście razy (na 12 polskich edycji) startował w krajowych eliminacjach Mistrzostw w GMiL, a do Paryża pojedzie po raz czwarty. Ma 46 lat, jest inżynierem elektrykiem. Ukończył studia na Politechnice Śląskiej i przez 20 lat pracował w Kopalni Węgla Kamiennego Siemianowice. Swoim matematycznym zainteresowaniom poświęca dużo czasu. Poza przygotowaniami do startów w Mistrzostwach w GMiL zajmuje się (amatorsko) teorią liczb – ostatnio bada własności sum kwadratów. Lubi literaturę popularnonaukową i fantastyczną, komputery, podróże oraz zabawy z roczną wnuczką Olą.

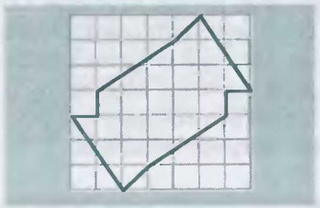
### Kategoria HC – Bartłomiej Dyda z Wrocławia

Ukończył studia matematyczne na wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Obecnie jest doktorantem w Instytucie Matematyki PWr. Poza matematyką interesuje się astronomią, brydżem i programowaniem. W Grach Matematycznych i Logicznych jest prawdziwym dinozaurem. Był członkiem pierwszej polskiej reprezentacji na Otwarte I Międzynarodowe Mistrzostwa Francji w 1992 r. Od tej pory regularnie uczestniczy w eliminacjach krajowych. Kilka razy udało mu się zakwalifikować do finału w Paryżu. W 2001 roku zdobył brązowy medal w kategorii L2. Jest przemiłym, skromnym człowiekiem, chociaż nie należy do osób szczególnie rozmownych.

A oto przykładowe zadania, z jakimi musieli zmierzyć się finaliści Mistrzostw Polski w GMiL.

**1.** Agata ma w pudełku 15 odważników, po jednym każdej z wag: 1 g, 2 g, 3 g, ..., 15 g. Dla swojego brata wymyśliła takie oto zadanie: „Wybierz z pudełka zestaw odważników o możliwie najmniejszej łącznej wadze i tak dobranych, aby z ich pomocą można było odważyć na wadze szalkowej każdą masę, której waga jest liczbą całkowitą, od 1 do 11 g, kładąc na lewej i prawej szalce wagi co najwyżej po jednym odważniku z wybranego zestawu". Jaki zestaw odważników powinien wybrać brat Agaty?

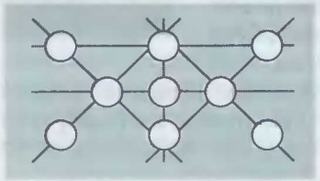
**2.** Z 27 jednakowych kostek sześciennych, wśród których jest 15 czarnych i 12 białych, sklejamy sześcienny klocek w taki sposób, aby czarne i białe kwadraty na każdej z jego sześciu ścian utworzyły przystające konfiguracje (dające się nałożyć jedna na drugą przez przesuwanie i obracanie). Narysować konfigurację czarnych i białych kwadratów na ścianie klocka dla dwóch różnych sposobów wykonania tego zadania.



**3.** Figurę pokazaną na rysunku obok podzielić na 4 jednakowe wielokąty o wierzchołkach w punktach kratowych, dające się nałożyć jeden na drugi przez przesuwanie lub obracanie, ale bez odwracania na drugą stronę.

**4.** Liczby 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 i 20 rozdzielamy na dwie grupy – *L* (licznik) i *M* (mianownik) – po 5 liczb w każdej, tak aby wynik dzielenia iloczynu liczb z grupy *L* przez iloczyn liczb z grupy *M* był liczbą całkowitą najmniejszą z możliwych. Jakie liczby znajdą się w grupie *L*?

**5.** Z przedziału domkniętego [0, 2] wybieramy pięć liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ i obliczamy iloczyn $W = (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)$. Jaki największy wynik możemy otrzymać? Dla jakich liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ta maksymalna wartość jest osiągana?



**6.** W kółka diagramu należy wpisać liczby naturalne od 1 do 9, tak aby sumy liczb leżących na liniach prostych były takie same. Podać dwa rozwiązania, każde dla innej sumy.

## Krasnoludek bywa wart człowieka, a człowiek krasnoludka

Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego II Mistrzostw Polski w GMiL, prodziekan Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej, **dr Janusz Górniak** został wyróżniony przez „Wieżę ciśnień", lokalny dodatek do „Gazety Wyborczej", przyznaniem tradycyjnego wrocławskiego krasnala za to, „że od lat promuje logiczne myślenie w kraju, w którym tak bardzo go brak".

# Matematyczne marsze na orientację

*Rok 2004 został w Unii Europejskiej ogłoszony „rokiem edukacji przez sport". Z tej okazji przedstawiamy bardzo interesujący mariaż matematyki ze sportem – matematyczne marsze na orientację – organizowane od wielu lat w Łodzi i od niedawna także we Wrocławiu. Rozwiązywanie zadań matematycznych pod chmurką, w słońcu lub w deszczu, podczas biegu po lesie z busolą i wykreślania na mapie tajemniczych punktów, mimo że mniej wygodne niż w szkolnej ławce, jest na pewno ciekawsze. Zachęcamy do udziału w tej nietypowej formie zawodów oraz do organizowania podobnych imprez u siebie. Pomocą mogą służyć kluby i związki biegu na orientację działające w regionie.*

## Turystyczne Marsze na Orientację „Orientuj się i licz"

Odbywają się już od siedmiu lat dwa razy w roku w Lesie Łagiewnickim w Łodzi. Uczestniczą w nich uczniowie i nauczyciele szkół z regionu łódzkiego (m.in. z Łodzi, Pabianic, Zgierza, Ozorkowa, Dobrej). Organizatorami marszów są Wojewódzki Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli oraz Uczniowski Klub Sportowy „Orientuś" działający przy Gimnazjum nr 33 w Łodzi. Całą imprezę wymyślili i od początku nadzorują sędzia główny Krzysztof Lewandowski i kierownik zawodów Małgorzata Paszyńska. W zawodach bierze udział każdorazowo ponad 500 osób. Tak duża impreza może się odbywać nie tylko dzięki sprawności organizatorów, ale i wsparciu finansowemu Urzędu Miasta Łodzi, Wojewódzkiego Funduszu Ochrony Środowiska i Gospodarki Wodnej i innych sponsorów.

Na czym właściwie polegają te zawody? Uczestnicy startują w trzyosobowych patrolach w czterech kategoriach wiekowych:

**TDm** (dzieci młodsze) – szkoły podstawowe,

**TDs** (dzieci starsze) – gimnazja,

**TJ** (juniorzy) – szkoły ponadgimnazjalne,

**TS** (seniorzy) – studenci, nauczyciele, rodzice z małymi dziećmi.

Zadaniem patrolu jest zdobycie jak największej liczby punktów za odnalezienie w terenie (i potwierdzenie tego specjalnym perforatorem na karcie startowej) stanowisk kontrolnych zaznaczonych na mapie. Zawody są typu scorelauf, tzn., że punkty kontrolne można potwierdzać w dowolnej kolejności. Każde stanowisko (oznaczone biało-pomarańczowym lampionem) ma swój numer, który jest jednocześnie liczbą punktów przyznawanych za znalezienie go. Numer ten jest zaznaczony na mapie. Im dalej punkt kontrolny jest położony od startu i mety i im trudniejsza jest

jego lokalizacja, tym większą posiada wartość. Dwa punkty kontrolne (o najwyższej wartości punktowej) nie są zaznaczone na mapie. Ich położenie należy wyznaczyć na podstawie podanych wskazówek, które często są geometrycznymi zadaniami konstrukcyjnymi. Cyrkiel, linijka i kątomierz są nieodzowne. Wytrawni uczestnicy marszów na orientację wiedzą, jak bardzo niewielka pomyłka w wyznaczeniu azymutu lub odległości na mapie może okazać się zgubna (i to dosłownie!) w terenie.

Punkty przyznawane są także za rozwiązanie zadań matematycznych o tematyce ekologicznej, które patrole otrzymują na starcie, muszą rozwiązać na trasie i przed przybyciem na metę wpisać rozwiązania do karty startowej. Punkty w zawodach można także tracić – za przekroczenie wyznaczonego limitu czasu pokonania trasy (za pierwsze 10 minut spóźnienia odejmuje się po 1 punkcie za minutę, za każdą następną – 10 punktów). Zatem patrol, który zgubi się w lesie, może ukończyć marsz z wynikiem ujemnym, nawet jeśli odnalazł wszystkie punkty kontrolne i poprawnie rozwiązał zadania. Patrole mogą być zdyskwalifikowane za niszczenie przyrody, łamanie regulaminu (np. używanie telefonów komórkowych), zgubienie karty startowej lub przybycie na metę w niepełnym składzie.

Nad wszystkim czuwa sztab jurorów rozstawionych dyskretnie w lesie oraz żmudnie zliczających punkty na mecie. W zawodach zwyciężają patrole, które w swojej kategorii zdobędą łącznie najwięcej punktów. Na nich czekają puchary i nagrody, a na wszystkich uczestników dyplomy i poczęstunek. Zawody odbywają się bez względu na pogodę, ale i ją organizatorzy zapewniają zawsze na bardzo wysokim poziomie.

## Wrocławskie Matematyczne Marsze na Orientację

Zawody wrocławskie odbywają się na zasadach bardzo podobnych do łódzkich, ponieważ na tych zawodach są wzorowane (jedynie, jak zgodnie przyznają zawodnicy mający porównanie obu imprez, zadania matematyczne są we Wrocławiu znacznie trudniejsze). Po kilku latach uczestniczenia w biegach łódzkich wrocławianie postanowili w ubiegłym roku sprawdzić, ile się nauczyli, i podobną imprezę zrobić u siebie. A że okazała się dużym sukcesem, postanowiono ją kontynuować.

Organizatorami wrocławskich marszów są Fundacja Stypendialna Matematyków Wrocławskich i LO nr XII we Wrocławiu. W tym roku do tego grona dołączyła jeszcze SP nr 53 we Wrocławiu stanowiąca bazę zawodów. Wsparcia finansowego imprezie udziela Urząd Miejski Wrocławia. Sędzią głównym jest specjalista w zakresie imprez na orientację, pracownik AWF Wrocław, Piotr Cych.

Zwycięzcami I Wrocławskiego Matematycznego Marszu na Orientację zostali:
- w kategorii szkół podstawowych: Agata Niżankowska, Marcin Słowik i Klara Szklarz z SP nr 91,
- w kategorii gimnazjów: Małgorzata Gakis, Agnieszka Bomersbach i Katarzyna Zajączkowska z Gimnazjum nr 1,
- w kategorii szkół średnich: Agata Barecka, Piotr Grabiec i Grzegorz Serafin z LO nr III,
- w kategorii nauczycieli i rodziców: Artur Malina, Jowita Dziwak i Zenon Kałużny ze Studium Podyplomowego „Nowoczesne Metody Nauczania Matematyki" prowadzonego w Instytucie Matematycznym UWr.



Na okładce prezentujemy zdjęcia z zawodów łódzkich i wrocławskich. Czasem nawet organizatorom trudno było rozpoznać, które są skąd, zwłaszcza że łodzianie od lat zapraszają wrocławian na swoje marsze i są zapraszani do Wrocławia. Najbliższe zawody odbędą się 25 września w Smoczym Lesie we Wrocławiu i 16 października w Lesie Łagiewnickim w Łodzi .

## Wybór zadań z Turystycznych Marszów „Orientuj się i licz" w Łodzi

### szkoły podstawowe

**1.** W 70-minutowym limicie czasu przewidzianym na ukończenie marszu serce nastolatka uderza ok. 6090 razy. Ile razy uderzą w czasie biegu serca całego patrolu, który przybiegł na metę dokładnie po wyczerpaniu 10-minutowego limitu spóźnień?

**2.** W czasie spoczynku serce człowieka uderza około 75 razy na minutę. Po intensywnym wysiłku zwiększa liczbę uderzeń nawet o 120%. Jakie tętno będzie miał uczestnik marszu, który pokona całą trasę biegnąc?

**3.** Najpopularniejszą mrówką Lasu Łagiewnickiego jest mrówka rudnica. Porusza się ona z szybkością 30 m/h. Patrol na obserwację biegnącej mrówki przeznaczył pół minuty. Jaką drogę w tym czasie mogła pokonać?

### gimnazja

**1.** W czasie 70-minutowego biegu człowiek wykonuje średnio 1120 oddechów. Ile oddechów na minutę wykonałby cały patrol, gdyby przespał limit czasu przewidziany na ukończenie marszu, jeśli w czasie snu liczba oddechów zmniejsza się o 1/4?

**2.** W powietrzu znajduje się 78% azotu, 21% tlenu i 1% innych gazów (np. argonu, dwutlenku węgla). Ile waży tlen, który pochłaniają płuca człowieka w czasie biegu z pełnym wykorzystaniem limitu czasu, jeśli oddycha on 20 razy na minutę, wdychając za każdym razem pół litra powietrza? (Litr powietrza waży 0,0013 g).

**3.** Normy UE przewidują, że w ciągu dnia hałas miejski nie powinien przekraczać 55 decybeli. O ile procent dopuszczalne normy hałasu miejskiego są wyższe od natężenia dźwięku szumu liści w lesie wynoszącego 20 dB?

### szkoły średnie

**1.** Człowiek oddycha średnio 960 razy na godzinę. W tym czasie wdycha 450 l powietrza, które waży 580 g. Ile waży powietrze, które wdycha cały patrol podczas marszu, wykorzystując całkowicie przewidziany limit czasu?

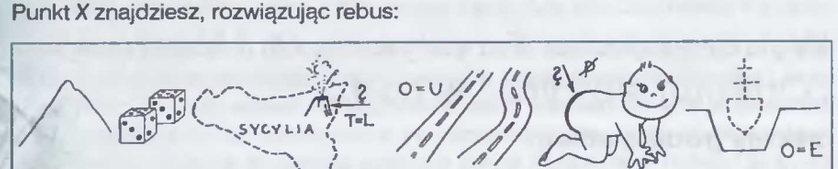
**2.** Uczestnik marszobiegu na 50 km uzyskał czas 4,5 godz. Biegł ze średnią szybkością 16 km/h, a szedł z szybkością 6 km/h. Ile kilometrów przebiegł?

**3.** Motyl paź królowej może latać z prędkością 40 km/h. Uderza skrzydłami około 300 razy na minutę. Ile razy musiałby to zrobić, gdyby leciał w linii prostej między punktami kontrolnymi, których odległość na mapie wynosi 10 cm? (Mapa na zawody wykonana jest w skali 1:10 000).

# Łamigłówki terenowe z I Wrocławskiego Marszu na Orientację

## szkoły podstawowe

Punkt *X* znajdziesz, rozwiązując rebus:

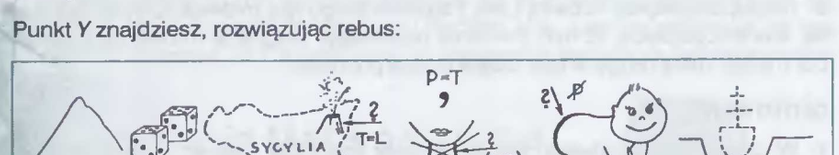



Punkt *Y* tworzy z punktami kontrolnymi 66 i 65 trójkąt równoboczny. Jest to ten spośród wszystkich punktów o tej własności, który leży najbliżej Odry.

## gimnazja

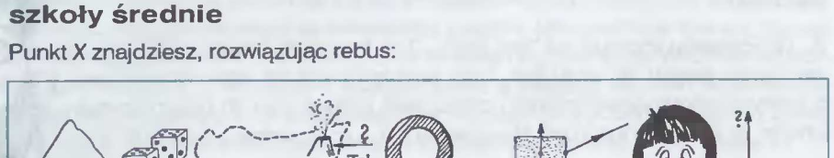
Punkt *X* leży na symetralnej odcinka, którego końcami są punkty kontrolne o numerach LXI i o piętnaście mniejszym. Punkty *X* i 66 mają tę samą długość geograficzną.

Punkt *Y* znajdziesz, rozwiązując rebus:




## szkoły średnie

Punkt *X* znajdziesz, rozwiązując rebus:




Punkt *Y* jest spodkiem wysokości trójkąta o wierzchołkach w punktach kontrolnych *A*, *B*, *C*, gdzie $|A-B| = 2$, $A > B$, odległość punktów *A* i *B* wynosi 600 m, a *C* to iloczyn piątki i kwadratu pewnej liczby naturalnej. *Y* leży na odcinku łączącym punkty *B* i *C*.

Małgorzata Mikołajczyk, Małgorzata Paszyńska



# Pytania (nieco) przewrotne

*Kolejny rok szkolny i akademicki za nami, a z nim skończył się sezon testów kompetencji, sprawdzianów, kolokwiów i egzaminów. My natomiast na rozpoczęcie wakacji proponujemy zupełnie bezstresowe sprawdzenie swojej kondycji miłośnika matematyki.*

## Poziom gimnazjum

1. Kiedy figura utworzona z dwóch okręgów ma środek symetrii? A oś symetrii?
2. Ile osi symetrii ma figura złożona z prostej i punktu?
3. Jaką figurę tworzą środki okręgów przechodzących przez dwa ustalone punkty?
4. Czy istnieją dwie liczby pierwsze, których suma jest liczbą pierwszą?
5. Czy istnieją dwie liczby złożone, których suma jest liczbą pierwszą?
6. Jakimi liczbami naturalnymi są *a* i *b*, dla których
   $\mathrm{NWD}(a, b) = 348$ i $\mathrm{NWW}(a, b) = 6\,970\,000\,000\,230$?
7. Jakie liczby całkowite spełniają równanie $x(x-3)(x-5)(x-7) = 3699$?
8. Czy suma dwóch liczb niewymiernych musi być niewymierna?
9. Czy różnica liczby niewymiernej i jej odwrotności może być wymierna?
10. Jakie liczby spełniają równanie: $x^{18} + 4x^{16} = 4x^{17}$?

## Poziom liceum

11. Czy suma nieskończenie wielu liczb wymiernych musi być wymierna?
12. Czy istnieją ciągi rozbieżne dla, których ciągi sum i iloczynów *n*-tych wyrazów są zbieżne?
13. Czy istnieje ciąg nieograniczony zawierający podciąg zbieżny?
14. Czy istnieje ciąg liczb wymiernych zbieżny do liczby niewymiernej?
15. Czy istnieje ciąg liczb niewymiernych zbieżny do liczby wymiernej?
16. Pierwiastkiem jakiego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$?
17. Czy istnieje funkcja okresowa różna od stałej bez okresu zasadniczego?
18. Czy istnieje funkcja nieokresowa, której pochodna jest okresowa i różna od stałej?
19. Jaką wartość przyjmuje w jedynce pochodna funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$? (odpowiedz bez obliczania tej pochodnej).
20. Ile wynosi $f^{(1\,200\,039)}(x)$ dla $f(x) = \sin x$?
21. Czy istnieje funkcja określona na liczbach rzeczywistych, ciągła tylko w trzech punktach, a różniczkowalna w dwóch?

Michał Kremzer

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

# Konkurs noworoczny rozstrzygnięty

*W numerze 1/2004 ogłosiliśmy konkurs polegający na wstawieniu pomiędzy cyfry 2 0 0 4 znaków działań lub nawiasów, tak aby w wyniku otrzymać kolejne liczby naturalne. Zwyciężał zawodnik, który uzyskał w ten sposób najdłuższy początkowy odcinek liczb naturalnych. Dozwolone było korzystanie ze wszystkich standardowych symboli działań, nie wolno było jednak przestawiać cyfr ani używać cyfr dodatkowych (np. jako wykładników). Nie dopuszczaliśmy również użycia liter, co uniemożliwiało wprowadzenie funkcji takich jak logarytm, sinus itp.*

Na konkurs przyszło wiele rozwiązań. Ich autorzy wykazywali się godną pozazdroszczenia pomysłowością lub... cierpliwością. Większość docierała do wartości w okolicach 30, nie uzyskując liczb 31, 33 lub 34. Poniżej pokazujemy, jak można było to zrobić:

$$31 = (2+0!)! + 0! + 4!,$$

$$33 = [(2+0!)!]!! - (0! + 4)!! = \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{200}}}} \cdot 4!\right],$$

$$34 = \left[\sqrt{\sqrt{20}} \cdot (0+4)!\right].$$

Do zapisu liczb 33 i 34 można było użyć nawiasów kwadratowych: $[x]$ to standardowe oznaczenie *części całkowitej* liczby $x$, czyli największej liczby całkowitej nie większej od $x$. Pomocne mogło być też zastosowanie tzw. podwójnej silni określonej wzorem:

$$n!! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n & \text{dla } n \text{ parzystych różnych od 0.} \end{cases}$$

Stosując te symbole, **Ryszard Rudnicki** z Włocławka dotarł do liczby 86, zajmując drugie miejsce. Już poza konkursem zapisał w ten sposób także liczby $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{14}$.

Niektórzy używali popularnego zwłaszcza wśród informatyków symbolu *sufitu* liczby $x$: $\lceil x \rceil$ to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od $x$. Ciekawym pomysłem był też zapis (zastosowany przez **Patryka Grabowskiego** z Łodzi) z użyciem systemu czwórkowego: $32 = (200)_4$.

Zwycięzcą konkursu został
**Aleksander Marlański,**
uczeń LO nr III we Wrocławiu, któremu udało się osiągnąć $n = 10010$. W nagrodę otrzymuje kalkulator naukowy. Gratulujemy!

Ten rewelacyjny rezultat udało się uzyskać dzięki symbolowi „?" wprowadzonemu przez D. E. Knutha w słynnej książce *Sztuka programowania*. Jest to analogia do symbolu „!" i pojęcia *silni* nazywana *słabnią*. Słabnia liczby naturalnej $k$ (ozn. $k?$) to suma liczb naturalnych od 1 do $k$ ($k?$ jest więc tym samym, co $k$-ta liczba trójkątna).

Używając różnych symboli matematycznych (w tym słabni) Olek przedstawił każdą z liczb od 0 do 140 na dwa sposoby: dopisując symbole do cyfr 2, 0 i do cyfr 0, 4. Dodając słabnię odpowiedniej liczby zapisanej dwójką i zerem do odpowiedniego wyrażenia zapisanego zerem i czwórką możemy uzyskać wszystkie liczby od 0 do 10010. Dlaczego? To pytanie pozostawiamy Czytelnikom. Wystarczy przeanalizować wartości $0?+0$, $1?+0$, $1?+1$, $2?+0$, $2?+1$, $2?+2$, $3?+0$, $3?+1$, $3?+2$, $3?+3$, ..., $140?+0$, $140?+1$, ..., $140?+140$.

Rezultat dla rekordowej wartości Olka wygląda tak:

$$10010 = 140? + 140 = (139 + 0!)? + (0! + 139).$$

Dalej: $139 = \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{89!}}}}\right]$, $89 = \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{83!}}}}\right]$,

$$83 = [\sqrt{117?}], \quad 117 = \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{51!}}}}\right], \quad 51 = \left[\sqrt{\sqrt{26!!}}\right]$$

i w końcu $26 = \lceil \sqrt{((4!!)?)?} \rceil$.

Teraz podstawiając kolejno zapisane wartości wstecz do wyrażenia na 10010 i zapisując w nim czwórkę przy jej pierwszym wystąpieniu (w 140?) jako $\triangle\!\!2$ (symbol Steinhausa), otrzymujemy gotowy wynik.

Posługując się arkuszem kalkulacyjnym, Olek w prosty sposób stworzył bazę danych, w której gromadził silnie, słabnie i podwójne silnie kolejnych liczb naturalnych oraz ich pierwiastki kwadratowe, pierwiastki z tych pierwiastków itd. Dzięki temu nie musiał wykonywać setek obliczeń, których i tak nie dałoby się wykonać dokładnie nawet na wysokiej klasy kalkulatorach. Dzięki opracowanej bazie łatwo można było wyszukać działania, których wynikiem jest dana liczba (większość wyników była oczywiście niecałkowita, ale można to łatwo poprawić za pomocą funkcji *część całkowita* oraz *sufit*).

Możliwość zgodnego z warunkami konkursu zapisania wszystkich liczb od 0 do 140 wzmacnia postawioną przez nas hipotezę, że da się w ten sposób otrzymać każdą liczbę całkowitą. Być może uda się to nawet tylko za pomocą silni, pierwiastka kwadratowego i części całkowitej, stosując je odpowiednio dużo razy w odpowiednich konfiguracjach (dzięki silni można uzyskać dowolnie duże liczby, a dzięki pierwiastkowi schodzić z nimi do jedynki). Pytanie to przechodzi do naszej kolekcji *Zadań (nie) do rozwiązania* na stronie internetowej http://www.mmm.ig.pl.

MŚ

**Pojęcia silni i słabni można uogólnić na dowolne liczby rzeczywiste.**

$$x! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

$$x? = \frac{x(x+1)}{2}.$$

**Czytelnicy zechcą sprawdzić, że dla $x \in \mathbb{N}$ wzory te pokrywają się ze standardowymi definicjami. Dla jakich $x$ silni nie da się wyliczyć?**

**Do podobnych zabaw można też użyć symbolu podsilni:**

$$!n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}\right).$$

**Symbole Steinhausa pozwalają na oszczędny zapis ogromnych liczb.**

$\triangle\!\!n = n^n$,

$\boxed{n} = n$ w $n$ trójkątach,

np.

$$\boxed{3} = 3 = \left((3^3)^{3^3}\right)^{(3^3)^{3^3}} > 10^{\overbrace{100\ldots0}^{40}}.$$

**Można myśleć, że $n$ w pięciokącie to $n$ w $n$ kwadratach itd.**

# Kram z odkryciami

• W maju 2004 r. metodami teorii ergodycznej udowodniono (Green, Tao), że istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne złożone z liczb pierwszych. Problem ten postawił Pál Erdős jeszcze w latach trzydziestych XX wieku. O ciekawych własnościach ciągów arytmetycznych można przeczytać też w artykule W. Bednarka *Podciągnij się z ciągów* – MMM 2/2004.

• 15 maja John Findley, uczestnik programu „Great Internet Mersenne Prime Search", znalazł (a po dwóch tygodniach potwierdzono to oficjalnie) największą znaną obecnie liczbę pierwszą, a zarazem czterdziestą pierwszą znaną liczbę pierwszą Mersenne'a. Jest to $2^{24036583}-1$, która ma ponad siedem milionów cyfr. O poszukiwaniu takich liczb i poprzednim rekordzie pisaliśmy w artykule *Pierwszy gigant* w MMM 1/2004.

**Hipoteza Riemanna** dotyczy pewnej funkcji ξ (czyt. dzeta), zwanej też funkcją Riemanna, która jest określona na punktach płaszczyzny, a jej wartościami są również punkty płaszczyzny. Hipoteza mówi, że wszystkie punkty $(x, y)$, których obrazem jest punkt $(0, 0)$, leżą na jednej prostej. Wykorzystuje się ją w wielu działach matematyki i fizyki, m.in. do badania rozmieszczenia liczb pierwszych.

• Środowisko matematyczne obiegła pod koniec maja sensacyjna wiadomość o udowodnieniu najsłynniejszego otwartego problemu w historii matematyki – hipotezy Riemanna. W 2001 roku za udowodnienie hipotezy Clay Mathematics Institute w Cambridge (Massachusets) zaoferował nagrodę miliona dolarów (ale za obalenie już nie!). Autorzy opublikowali dwa dowody w Internecie, prosząc innych matematyków o ich sprawdzenie. Jednak oba okazały się błędne.

## Daj, o Pani, o boska Mnemozyno...

W poprzednim numerze ogłosiliśmy konkurs na najciekawsze chwyty mnemotechniczne, ułatwiające mechaniczne zapamiętanie jakiegoś materiału. Otrzymaliśmy już sporo ciekawych propozycji, a listy wciąż nadchodzą. Wyniki konkursu ogłosimy w następnym numerze.

Gruszki są w piwnicy, gruszki trzeba jeść,
siedem razy osiem jest pięćdziesiąt sześć.

Zapamiętaj bracie młody:
wlewaj zawsze kwas do wody!

Zapamięta, kto nie tłuk,
Tuzin to dwanaście sztuk.

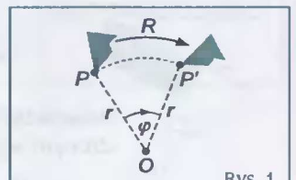
**Siedem** wzgórz **pię-trzy** się.
(753 – założenie Rzymu – miasta siedmiu wzgórz)

# Etiudy geometryczne

# Obracany

*Tekst ten jest kontynuacją artykułu pt. „Odbijany" z MMM nr 3/2003. Autor dowodzi tam, że złożenie dwóch symetrii osiowych na płaszczyźnie jest zawsze przesunięciem lub obrotem. Tym razem zastanowimy się, jakim przekształceniem może być złożenie dwóch obrotów.*

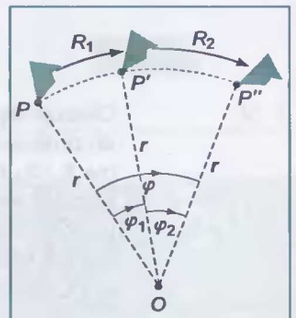
**Obrotem** płaszczyzny wokół punktu $O$ nazywamy takie przekształcenie, w którym dowolny punkt $P$ i jego obraz $P'$ znajdują się w jednakowej odległości od punktu $O$, a $\sphericalangle POP'$ jest dla wszystkich punktów $P$ taki sam (rys. 1). Punkt $O$ nazywamy wtedy **środkiem obrotu**, a kąt między półprostymi $OP$ i $OP'$ – **kątem obrotu**. Obroty będziemy oznaczali literą $R$ (od pochodzącego z łaciny słowa *rotacja*).



Rys. 1

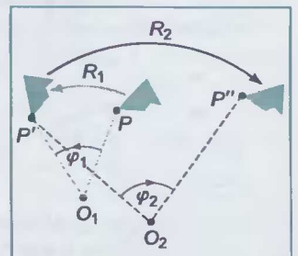
Obroty, podobnie jak inne przekształcenia geometryczne, można składać, tzn. wykonywać kolejno i wynik takiego złożenia traktować jako jedno nowe przekształcenie. Spróbujmy opisać, jakie przekształcenie może być wynikiem złożenia dwóch obrotów. Rozpatrzymy sytuacje, gdy wykonywane kolejno obroty mają ten sam środek i różne środki.

Sytuacja I. Gdy składane obroty mają ten sam środek obrotu $O$, złożenie wykonuje się bardzo łatwo (rys. 2). Jeżeli kąt pierwszego obrotu jest równy $\varphi_1$, a drugiego $\varphi_2$, to efektem złożenia jest oczywiście obrót wokół tego samego środka (bo $P'$ i $P$ oraz $P'$ i $P''$ leżą w tej samej odległości od $O$) o kąt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (czyli będący sumą kątów obrotu składników złożenia). Jeśli składamy obroty o różnych orientacjach, należy przyjąć jedną z nich jako dodatnią i za drugi kąt wiąć liczbę ujemną.



Rys. 2. Kąty obrotu $\varphi_1$ i $\varphi_2$ mają zgodną orientację

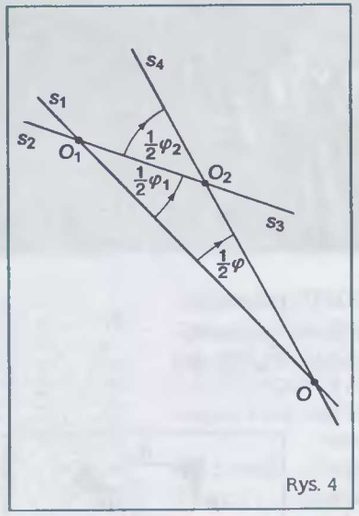
Sytuacja II. Gdy obroty mają różne środki $O_1$ i $O_2$ (rys. 3), rzecz wygląda inaczej. Aby stwierdzić, co jest wynikiem złożenia takich obrotów, posłużymy się twierdzeniem udowodnionym w MMM 3/2003, mówiącym, że **złożenie dwóch odbić w osiach nierównoległych jest obrotem wokół punktu przecięcia tych osi o podwojony kąt zawarty między nimi**. Łatwo zauważyć, że zachodzi też twierdzenie odwrotne:



Rys. 3. Kąty obrotu $\varphi_1$ i $\varphi_2$ mają różne orientacje

### Twierdzenie 1

Każdy obrót płaszczyzny wokół punktu $O$ o kąt $\varphi$ może być przedstawiony jako **złożenie dwóch odbić** w osiach przecinających się w punkcie $O$ i tworzących kąt $\frac{1}{2}\varphi$.



Rys. 4

Przedstawmy obrót $R_1$ w postaci złożenia dwóch odbić w prostych $s_1$ i $s_2$, z których każda przechodzi przez punkt $O_1$. W tym celu trzeba przez punkt $O_1$ poprowadzić dwie proste, przy czym jedną możemy obrać dowolnie, a drugą musimy poprowadzić pod kątem $\frac{1}{2}\varphi_1$ do pierwszej. Oznaczmy przez $S_1$ i $S_2$ odbicia odpowiednio w prostych $s_1$ i $s_2$. Mamy więc $R_1 = S_1 \circ S_2$. To samo robimy z obrotem $R_2$, który przedstawiamy jako $R_2 = S_3 \circ S_4$ ($s_3$ i $s_4$ są innymi osiami symetrii).

Sytuację tę przedstawia rys. 4. Skoro w konstrukcji $R_1$ przez $O_1$ jedną prostą możemy poprowadzić dowolnie (niech będzie nią $s_2$), to poprowadźmy ją tak, aby przechodziła też przez $O_2$; cel takiego postępowania wyjaśni się za chwilę. Prostą $s_1$ poprowadzimy oczywiście tak, aby w $O_1$ z prostą $s_2$ tworzyła kąt $\frac{1}{2}\varphi_1$. Podobnie postępujemy z obrotem $R_2$, przy czym prostą $s_3$ przechodzącą przez $O_2$ (i wybieraną dowolnie) obieramy tak, aby przechodziła też przez $O_1$ (a więc pokrywała się z prostą $s_2$), a prostą $s_4$ prowadzimy do niej pod kątem $\frac{1}{2}\varphi_2$.

Prześledźmy teraz, co jest rezultatem złożenia obrotów $R_1$ i $R_2$. Zgodnie z wprowadzonymi wyżej oznaczeniami mamy:

$$R_1 \circ R_2 = (S_1 \circ S_2) \circ (S_3 \circ S_4) = S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 = S_1 \circ S_4,$$

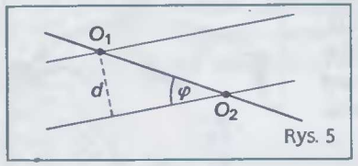
usuwamy nawiasy, bo nie mają wpływu na wynik

bo $s_2 = s_3$ i $S_2 \circ S_3$ jako dwukrotne odbicie w tej samej prostej jest identycznością, którą w dalszych obliczeniach można pominąć; właśnie dlatego prostą $s_2$ poprowadziliśmy przez $O_2$, a $s_3$ – przez $O_1$

Okazuje się, że złożenie $R_1 \circ R_2$ dwóch obrotów o różnych środkach sprowadza się do złożenia dwóch odbić $S_1 \circ S_4$. Tymczasem wiemy już (MMM nr 3/2003), że **złożenie $S_1 \circ S_4$ może być obrotem, jeżeli proste $s_1$ i $s_4$ przecinają się, albo przesunięciem równoległym, gdy $s_1$ i $s_4$ są równoległe**. Zastanówmy się, w jakim wypadku proste $s_1$ i $s_4$ mogą być równoległe. Rzut oka na rys. 4 przekonuje nas, że jest tak tylko wtedy, gdy kąty obrotów są przeciwne. W każdym innym wypadku $s_1$ i $s_4$ przecinają się. Mamy więc:

### Twierdzenie 2

Złożenie obrotów $R_1$ i $R_2$ o różnych środkach jest **przesunięciem równoległym**, gdy kąty obrotów są przeciwne. W przeciwnym razie złożenie to jest **obrotem**.



Rys. 5

Przyjrzyjmy się dokładniej tym złożeniom.

II. a) W przypadku gdy $s_1 \parallel s_4$ i złożenie $R_1 \circ R_2$ jest przesunięciem, jego wektor jest dwukrotnie dłuższy od odległości $d$ między osiami symetrii (patrz twierdzenie w MMM 3/2003), czyli od $d = |O_1O_2|\sin\varphi$, gdzie $\varphi = |\varphi_1| = |\varphi_2|$ (rys. 5).

II. b) W przypadku gdy $s_1 \nparallel s_4$ i złożenie $R_1 \circ R_2$ jest obrotem, środkiem tego obrotu jest punkt $O$, będący przecięciem prostych $s_1$ i $s_4$, a kąt obrotu $\varphi$ obliczymy posługując się rys. 4. Widzimy, że trójkąt $O_1O_2O$ ma kąty wewnętrzne $\frac{1}{2}\varphi_1$ i $\frac{1}{2}\varphi$ oraz kąt zewnętrzny $\frac{1}{2}\varphi_2$, przy czym kąty $\varphi_1$ i $\varphi$ są skierowane przeciwnie, a $\varphi_2$ i $\varphi$ zgodnie.



Zatem na podstawie własności kąta zewnętrznego trójkąta, uwzględniając orientacje kątów $\varphi_1$ i $\varphi$, mamy: $-\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi_2$. Stąd $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, więc sytuacja jest taka sama, jak w punkcie I przy złożeniu obrotów o tym samym środku. Podobnie będzie również dla $\varphi_1$ i $\varphi_2$ o tej samej orientacji, co Czytelnicy zechcą sprawdzić sami. Na koniec możemy podsumować nasze rozważania, formułując ogólne:

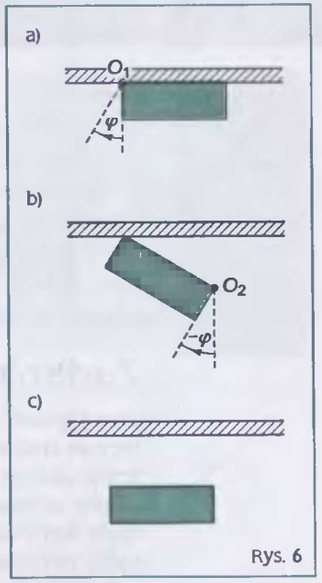
### Twierdzenie 3

Złożenie obrotów $R_1$ i $R_2$

a) o wspólnym środku $O$ i kątach $\varphi_1$ i $\varphi_2$ jest **obrotem** o środku $O$ o kąt $\varphi_1 + \varphi_2$.

b) o różnych środkach $O_1$ i $O_2$ oraz tym samym kącie obrotu ($\varphi_1 = \varphi_2$) lub kątach obrotów $\varphi_1$ i $\varphi_2$ różnych co do wartości bezwzględnej jest **obrotem** o kąt $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ wokół punktu $O$ przecięcia prostych przechodzących odpowiednio przez $O_1$ i $O_2$ i nachylonych do prostej $O_1O_2$ pod kątami $\frac{1}{2}\varphi_1$ i $\frac{1}{2}\varphi_2$.

c) o różnych środkach $O_1$ i $O_2$ oraz kątach obrotów równych co do wartości bezwzględnej $\varphi$ i przeciwnie skierowanych jest **przesunięciem równoległym** o wektor długości $2|O_1O_2|\sin\varphi$.



Rys. 6

Z punktu c) powyższego twierdzenia często korzystamy w praktyce, np. gdy ciężką szafę chcemy odsunąć od ściany. Podnosimy ją nieco, aby opierała się o podłogę tylko jedną nogą, a następnie obracamy o pewien kąt dokoła tej nogi i stawiamy na podłodze (rys. 6 widok z góry). Następnie podnosimy szafę z drugiej strony, tak by opierała się na innej nodze i obracamy szafę wokół tej nogi o kąt przeciwny niż poprzednio. Postawiona na podłodze szafa jest odsunięta równolegle od ściany.

Stanisław Fudali

## Wyłowione z sieci (1)

**Świat Matematyki**

http://mathworld.wolfram.com/

Interaktywna encyklopedia w języku angielskim obejmująca różne działy matematyki. Jest bogato ilustrowana, także animacjami. Zawiera proste wyjaśnienia skomplikowanych problemów matematycznych. Można z niej korzystać jak ze standardowej wyszukiwarki, przeglądać wybrane działy (algebra, arytmetyka, analiza, zastosowania matematyki, matematyka dyskretna, historia matematyki, teoria liczb, prawdopodobieństwo, statystyka, topologia, geometria i matematyka rekreacyjna) lub czytać losowo wybrane hasła, aby dowiedzieć się czegoś nowego. Materiały zostały zebrane przez Erica W. Weissteina we współpracy z wieloma matematykami z całego świata przez 10 lat jego pracy dla Wolfram Research Inc. (które jest m.in. producentem programu *Mathematica*).

cd. s. 21

## Sztafeta pokoleń, czyli 5 15 10 20

**Bliźniaki**

5. Z dwóch braci bliźniaków jeden obchodzi co roku urodziny dzień później niż drugi. Jak to możliwe?

10. Z dwóch braci bliźniaków jeden obchodzi co roku urodziny, a drugi nie. Jak to możliwe?

15. Z dwóch braci bliźniaków jeden obchodzi co roku urodziny dwa dni później niż drugi. Jak to możliwe?

20. W jakim najdłuższym odstępie czasu mogą obchodzić urodziny dwaj bliźniacy?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru

Samouczek zadaniowy

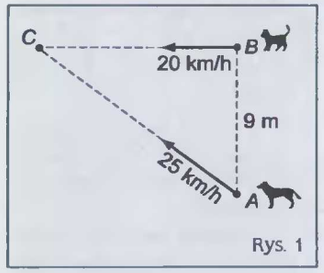
# Podwórkowe gonitwy

Miłośników zwierząt informujemy, że Azor, Bonifacy i Cywil ścigają się wyłącznie dla zabawy.

*Kiedy chcemy kogoś dogonić, kierujemy się wprost na niego. Nawet jeśli zorientuje się, że jest ścigany, i zacznie uciekać najbardziej racjonalnie, czyli „na wprost od goniącego", to jeśli tylko nasza szybkość jest większa, trzymanie się tej zasady sprawi, że złapiemy go w najkrótszym możliwym czasie. Jeśli ten, kogo gonimy, nie wie, że jest ścigany, i spokojnie idzie stale przed siebie, możemy dogonić go jeszcze szybciej. Złapanie ściganego jest czasem możliwe nawet wtedy, gdy nasza szybkość jest mniejsza od jego szybkości. W poniższych zadaniach przeanalizujemy różne sytuacje, jakie mogą zdarzyć się w trakcie pościgu.*

## Zadanie 1

Przed nosem psa Azora w odległości 9 m przebiega wzdłuż linii prostej kot Bonifacy ze stałą szybkością 20 km/h. Gdy kot znajduje się dokładnie na wprost psa, Azor puszcza się za nim w pogoń. Biegnie z szybkością 25 km/h. Niestety, Azor zaczął przeraźliwie ujadać, Bonifacy zorientował się w niebezpieczeństwie i porzucił dotychczasowy kierunek wędrówki, co wydłużyło czas pościgu. Ile razy krótszy byłby ten czas, gdyby Azor nie narobił hałasu? W jaki sposób mógł złapać kota najszybciej?



Rys. 1

### Rozwiązanie

Jeśli Bonifacy nie wie, że jest ścigany, Azor powinien biec tak, aby przeciąć drogę kota po jak najkrótszym czasie $t$. Do punktu $C$, w którym go złapie (rys. 1), przebiegnie drogę $AC = t \cdot v_A$, a kot drogę $BC = t \cdot v_B$. Ponieważ pościg rozpoczął się, gdy Bonifacy był naprzeciwko Azora, punkty $A$, $B$ i $C$ tworzą trójkąt prostokątny. Stosując twierdzenie Pitagorasa mamy $d^2 + v_B^2 t^2 = v_A^2 t^2$, czyli

$$t = \frac{d}{\sqrt{v_A^2 - v_B^2}} = \frac{0{,}009}{15} = 2{,}16 \text{ s}.$$

Jeśli Azor biegnie stale za kotem, a Bonifacy stosuje najlepszą metodę ucieczki – „prosto od ścigającego", to zwierzaki ścigają się po prostej $AB$, czasy pościgu i ucieczki są takie same, a drogi przebyte do miejsca spotkania przez Azora i Bonifacego różnią się o $d$. Możemy więc napisać równanie: $v_B t + d = v_A t$, skąd

$$t = \frac{d}{v_A - v_B} = \frac{0{,}009}{5} = 6{,}48 \text{ s}.$$

Zatem gdyby Azor nie zdradził się szczekaniem, mógłby dogonić Bonifacego w trzykrotnie krótszym czasie.



## Zadanie 2

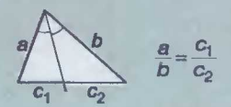
Azor i Bonifacy bawią się w berka na ogromnym, płaskim podwórzu. Azor biegnie stale z szybkością $v_A$, a Bonifacy z szybkością mniejszą, równą $v_B$. Bonifacy jest już starym kotem, słabo widzi i niedosłyszy, dlatego ucieka metodą „prosto przed siebie" niezależnie od tego, co robi Azor. Roztropny Azor natomiast zawsze wyznacza punkt, w którym w najkrótszym czasie może złapać kota, i biegnie w stronę tego punktu. W jaki sposób Azor wyznacza te punkty? W którą stronę powinien uciekać Bonifacy?

### Rozwiązanie

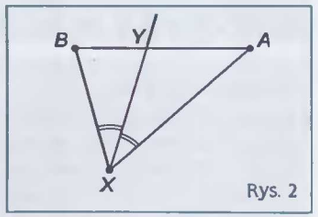
Najpierw trzeba wyznaczyć wszystkie punkty, które Azor i Bonifacy startując ze swoich aktualnych pozycji mogą osiągnąć w tym samym czasie (są to potencjalne punkty ich spotkania). Oznaczmy dowolny taki punkt przez $X$. Ponieważ czasy pościgu i ucieczki są jednakowe, stosunek dróg przebytych przez zwierzęta do chwili spotkania jest taki, jak stosunek ich szybkości. Jeśli $A$ i $B$ oznaczają początkowe położenia psa i kota, to wiemy, że $XA : XB = v_A : v_B = k$ ($k$ jest pewną stałą większą od 1). Niech teraz $Y$ będzie takim punktem na odcinku $AB$, że $YA : YB = k$. Położenie tego punktu możemy wyznaczyć jednoznacznie dzięki twierdzeniu Talesa (jak?). Dla każdego punktu $X$ mamy wówczas: $YA : YB = XA : XB$. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie możemy więc wnioskować, że półprosta $XY$ jest dwusieczną kąta $X$ w trójkącie $AXB$. Szukamy zatem wszystkich takich punktów $X$, że dwusieczna kąta $AXB$ przechodzi przez ustalony z góry punkt $Y$ (rys. 2).

**Twierdzenie o dwusiecznej**

W dowolnym trójkącie dwusieczna kąta pomiędzy dwoma bokami dzieli trzeci bok na odcinki pozostające w takim samym stosunku, co te boki.

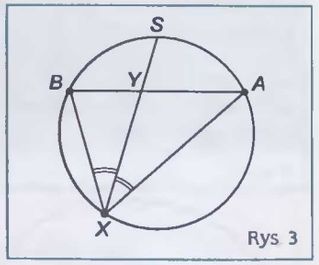



$$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{c_2}$$



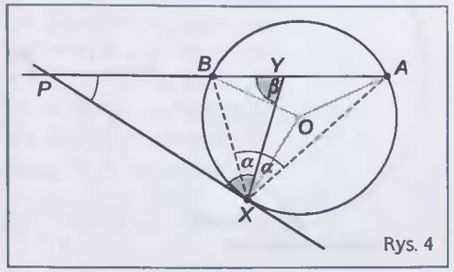
Rys. 2

Wybierzmy teraz dowolny okrąg $o$, którego cięciwą jest odcinek $AB$. Pokażemy, że na tym okręgu znajdują się dokładnie dwa punkty $X$ spełniające podany warunek. Aby je znaleźć, wyznaczamy środki obu łuków $\overset{\frown}{AB}$ powstałych na okręgu $o$ (ozn. $S$ i $S'$), a następnie prowadzimy półproste $SY$ i $S'Y$. Punkty przecięcia tych półprostych z okręgiem, różne od $S$ i $S'$ są szukanymi punktami $X$ i $X'$. Sytuację tę dla jednego z łuków $\overset{\frown}{AB}$ przedstawia rys. 3. Kąty $AXY$ i $BXY$ są równe, bo równe są kąty $AXS$ i $BXS$, jako kąty wpisane oparte na przystających łukach. Dla punktu $X'$ rozumowanie jest analogiczne.

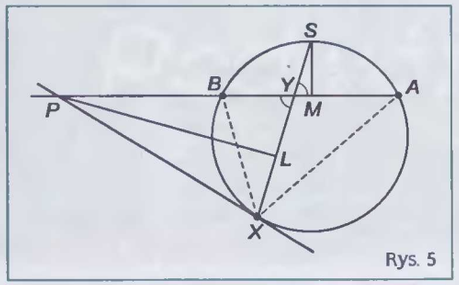


Rys. 3

Dalej zajmijmy się już tylko punktem $X$ znalezionym na okręgu $o$. Prowadzimy w tym punkcie styczną do okręgu i niech $P$ będzie punktem jej przecięcia z prostą $AB$ (rys. 4). Uzasadnimy, że odcinki $PX$ i $PY$ są równe. Oznaczmy $O$ – środek okręgu $o$, $\sphericalangle AXY = \sphericalangle BXY = \alpha$ oraz $\sphericalangle BYX = \beta$. Mogą zajść dwa przypadki: $O$ leży wewnątrz trójkąta $ABX$ lub nie, ale ponieważ prowadzą do tego samego wyniku, rozważymy tylko pierwszy z nich. Mamy wtedy: $\sphericalangle XOA = 2\sphericalangle XBA = 2(180° - \alpha - \beta)$, stąd $\sphericalangle OXA = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle XOA) = \alpha + \beta - 90°$. Zauważmy też, że $\sphericalangle PXY = 90° + \sphericalangle OXA - \alpha$, a więc $\sphericalangle PXY = \beta$. Wynika z tego, że $\alpha = \beta$, więc trójkąt $PXY$ jest równoramienny i wobec tego rzeczywiście $PX = PY$.



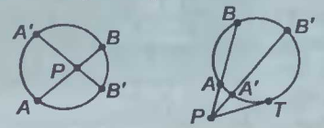
Rys. 4



Rys. 5

**Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu**

Dla danego okręgu i punktu $P$, jeśli poprowadzimy z tego punktu dowolną sieczną przecinającą okrąg w punktach $A$ i $B$, to iloczyn długości $PA$ i $PB$ jest stały.



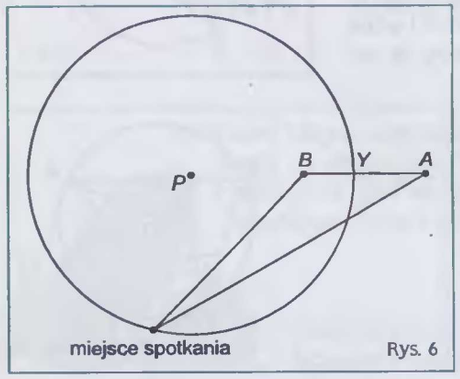
$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$



$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = PT^2$

**Apoloniusz z Pergi**

Żył ok. 250 r. p.n.e. W świecie starożytnym zyskał sobie przydomek „Wielkiego Geometry". Zasłynął jako badacz krzywych stożkowych (powstających w przekrojach powierzchni stożkowej płaszczyzną), a wiedzę na ich temat doprowadził niemal do stanu, w jakim znajduje się ona współcześnie (później, dzięki wprowadzeniu geometrii analitycznej, udało się w zasadzie jedynie uprościć wiele jego rozumowań). Zajmował się też problemami dotyczącymi styczności trzech okręgów.



Rys. 6

Niech teraz $L$ będzie środkiem odcinka $XY$, a $M$ środkiem odcinka $AB$ (rys. 5). Zauważmy, ze trójkąty $PYL$ oraz $SYM$ są podobne (prostokątne z jednakowym jednym kątem ostrym). Wobec tego $\frac{YS}{YM} = \frac{PY}{YL}$, czyli $YS \cdot YL = PY \cdot YM$. Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu wiemy, że $YA \cdot YB = YS \cdot YX = YS \cdot 2YL$ i podstawiając do poprzedniej równości otrzymujemy $PY = \frac{YB \cdot YA}{2YM}$ (*). Ponieważ $A$, $B$ oraz $Y$ są ustalonymi punktami, więc wielkość $PY$ musi być stała, niezależna od położenia punktu $X$. Wobec tego położenie punktu $P$ (leżącego na prostej $AB$ w ustalonej odległości od $Y$) jest niezależne od punktu $X$ i wiemy, że $PX = PY$. Wobec tego zbiór punktów $X$ jest okręgiem o środku w punkcie $P$ i promieniu $PY$. Jest to tzw. **okrąg Apoloniusza** dla punktów $A$ i $B$. Jego promień można łatwo wyliczyć ze wzoru (*) zauważając, że $YM = \frac{AB}{2} - YB$. Otrzymamy wtedy:

$$PY = \frac{YA \cdot YB}{2(\frac{AB}{2} - YB)} = \frac{YA \cdot YB}{AB - 2YB} = \frac{YA \cdot YB}{AY + YB - 2YB} =$$

$$= \frac{YA \cdot YB}{AY - YB} = \frac{YA \cdot YB(YA + YB)}{YA^2 - YB^2} =$$

$$= \frac{AB}{\frac{YA}{YB} - \frac{YB}{YA}} = \frac{AB}{\frac{v_A}{v_B} - \frac{v_B}{v_A}}.$$

Zatem znając początkowe położenie Azora i Bonifacego oraz szybkości ich poruszania się, możemy wykreślić okrąg Apoloniusza punktów $A$ i $B$ będący zbiorem punktów, do których pies i kot mogą dotrzeć w tym samym czasie poruszając się po linii prostej każdy. Ponieważ punkt $B$ znajduje się zawsze wewnątrz tego okręgu (co wynika z konstrukcji), Bonifacy wybierając dowolny kierunek ucieczki musi gdzieś przeciąć okrąg. Na ten właśnie punkt powinien kierować się Azor (rys. 6). Oczywiście, żeby zapewnić sobie jak najdłuższy czas ucieczki, Bonifacy powinien kierować się na najbardziej odległy punkt okręgu. Jak go wyznaczyć? Z jednej strony dla punktu $B$ leżącego wewnątrz okręgu najbardziej odległym jest jeden z punktów przecięcia okręgu ze średnicą przechodzącą przez punkt $B$ (dlaczego?), z drugiej strony wydaje się, że najbardziej sensownym kierunkiem ucieczki jest „na wprost od wroga", czyli wzdłuż półprostej $AB$? Czy to ten sam kierunek co poprzednio?



Oczywiście okrąg Apoloniusza można wykreślić dla dowolnych punktów $A$ i $B$ oraz dowolnego stosunku $\frac{AY}{BY} \neq 1$, co w naszym zadaniu oznacza, że szybkości psa i kota mogą być dowolne, byle różne, jednak jeśli kot biegnie szybciej, to punkt $B$ leży na zewnątrz okręgu (co pozostawiamy do sprawdzenia Czytelnikom), więc pies w żaden sposób nie może go dogonić.

## Zadanie 3

Dwa psy Azor i Cywil ścigają kota Bonifacego ($A$, $C$, $B$ to ich wyściowe pozycje). W którą stronę powinien uciekać kot, aby jak najdłużej nie dać się złapać? Co powinny zrobić psy?

### Rozwiązanie

Prowadzimy osobne okręgi Apoloniusza dla każdego ze ścigających psów. Jeśli tylko szybkości psów są większe niż kota, punkt $B$ leży wewnątrz obu okręgów. Zatem mogą zajść dwa przypadki: albo okręgi przecinają się, albo jeden leży wewnątrz drugiego. Jeśli okręgi się przecinają (rys. 7), niech S będzie dalszym (względem ściganego) punktem przecięcia tych okręgów. Najlepszą strategią zarówno dla ściganego jak i dla ścigających jest kierowanie się na punkt $S$ (gdyż wierzchołek soczewki jest najbardziej odległy od dowolnego punktu w jej wnętrzu). W tym punkcie kot zostanie złapany. Jeśli okręgi się nie przecinają, to najlepsza strategia ucieczki (a więc i pościgu) polega na wyznaczeniu najbardziej odległego od $B$ punktu wewnętrznego okręgu (pochodzącego od groźniejszego psa) i kierowania się na ten punkt. Kot zostanie tam złapany tylko przez jednego psa.

## Zadanie 4

Kot Bonifacy biegnie do swojej kryjówki $K$ (rys. 8) z szybkością 25 km/h. Po drodze czyhają na niego dwa niezbyt roztropne psy: Azor i Cywil. Początkowe pozycje zwierząt – punkty $B$, $A$ i $C$ – są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Czy Bonifacy zdoła przemknąć się miedzy psami, jeśli goniąc go z szybkością co najwyżej 20 km/h będą się one kierowały zasadą „biec prosto na uciekającego"?

### Rozwiązanie

Jedyną strategią dla kota może być kierowanie się prosto na $K$. Rozważmy ruch jednego z psów (oba poruszają się symetrycznie). Niech $S$ będzie środkiem trójkąta $ABC$, a $M$ środkiem odcinka $AC$. Jasne jest, że psy mogą złapać kota dopiero na odcinku $SM$. Gdy kot osiągnie punkt $S$, pies $A$ będzie znajdował się w jakimś punkcie $R$, leżącym wewnątrz trójkąta $ABS$ (dlaczego?). Zauważmy, że do każdego z punktów $X$ odcinka $SM$ kot dotrze teraz szybciej od psów, oznaczmy bowiem jego drogę $SX$ jako $a$. Psy muszą z punktu $R$ do $X$ pokonać drogę dłuższą niż długość $XX'$ odcinka łączącego punkt $X$ z jego rzutem na $AS$, która wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Czas dotarcia kota do $X$ jest równy $\frac{a}{25}$, a psów dłuższy niż $\frac{a\sqrt{3}}{40}$, a więc dłuższy niż czas kota. Oznacza to, że kotu uda się ujść cało.

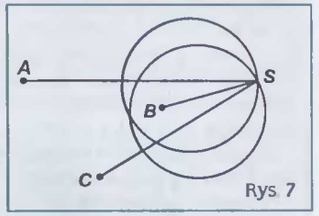
**Wyłowione z sieci (2)**

**Naukowe zabawki**

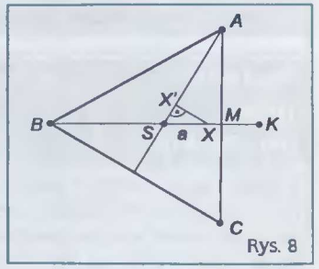
http://www.scitoys.com/

Interesująca strona poświęcona naukowym... zabawkom. Pokazuje, jak można bawić się fizyką doświadczalną, biologią i matematyką. W tym ostatnim dziale pokazano np., jak zrobić z papieru ruchomą bryłę. W części poświęconej fizyce można się natomiast dowiedzieć, jak zrobić dzwoneczki Franklina – proste urządzenie ostrzegające przed nadchodzącą burzą.

cd. s. 31



Rys. 7



Rys. 8

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

**1.** W chwili gdy Azor dostrzegł Bonifacego, ten biegł po prostej prostopadłej do linii wówczas ich łączącej w odległości 10 m. Azor zaczął się za nim cicho skradać, tak że kot go nie zauważył. Biegł dalej przed siebie z szybkością 25 km/h. Azor mógł skradać się z szybkością najwyżej 20 km/h. Na jaką najmniejszą odległość może on zbliżyć się do kota?

**2.** W chwili gdy Azor dostrzegł Bonifacego i zaczął go gonić, był w odległości 20 m od niego. Pies biegnie z szybkością 25 km/h, a kot 20 km/h. Po jakim czasie kot zostanie złapany, jeśli na drodze ucieczki znajduje się rzeka, do której kot nie wskoczy? Początkowe odległości psa i kota od rzeki wynosiły odpowiednio 36 i 20 m. Zakładamy, że brzeg rzeki jest prostoliniowy.

**3.** Cztery psy siedzą w wierzchołkach kwadratu i w tej samej chwili zaczynają ścigać się nawzajem z szybkością 25 km/h (*A* ściga *B*, *B* ściga *C*, *C* – *D*, a *D* – *A*). Jaką drogę przebędzie każdy pies do miejsca spotkania? A jeśli w gonitwie bierze udział *n* psów usadzonych w wierzchołkach *n*-kąta foremnego?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

## Zadania (nie) do rozwiązania

**1.** Stary, ślepy pies Azor usłyszał w pewnym momencie miauknięcie równie starego (więc i niedowidzącego) Bonifacego. Wydał w tym momencie głośne szczeknięcie i rzucił się w pogoń. Bonifacy ucieka po linii prostej, a Azor zlokalizował tylko jego początkowe położenie. Czy biegnąc z niewiele większą od kota szybkością Azor ma szanse na złapanie go? Jaka powinna być strategia pościgu?

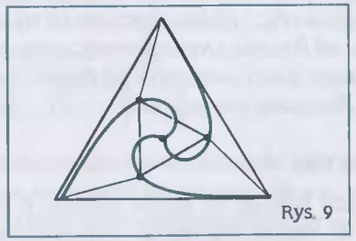
**2.** Kot siedzący w środku kwadratu został otoczony przez cztery wilczury znajdujące się w wierzchołkach tego kwadratu. Jaki musi być stosunek szybkości kota do szybkości psa, żeby udało mu się uciec z pułapki?

## Zadanie 5

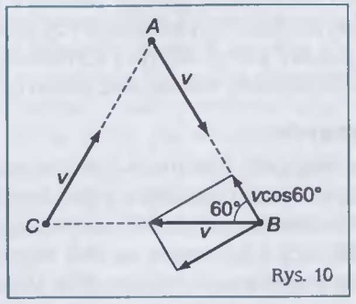
Trzy zajadłe wilczury Azor, Burek i Cywil, znajdujące się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku 18 m, zaczęły ścigać się nawzajem (*A* ściga *B*, *B* ściga *C*, a *C* ściga *A*), biegnąc stale w kierunku gonionego z szybkością 24 km/h. Po jakim czasie dojdzie do kotłowaniny?

### Rozwiązanie

Zauważmy, że psy przez cały czas gonitwy znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego, ale o malejącej długości boku (rys. 9). Przyjrzymy się psom *A* i *B*. Długość łączącego je odcinka maleje, gdyż *A* zmierza w kierunku *B* z szybkością *v*, ale w stronę *A* jest również zwrócona składowa prędkości *B* równa $v \cdot \cos 60°$ (składowa prostopadła do *AB* nie ma wpływu na zmianę odległości *AB*) – rys. 10. Wobec tego *A* oraz *B* zbliżają się z szybkością $\frac{3}{2}v$. Podobnie *B* i *C* oraz *C* i *A*. Zatem do momentu spotkania upłynie $t = \frac{AB}{\frac{3}{2}v} = 1{,}8$ s, a każdy z psów przebiegnie do tej chwili drogę równą $\frac{2}{3}$ początkowej odległości od gonionego.



Rys. 9




Rys. 10

LITERATURA

Hugo Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989.

Hugo Steinhaus, *100 zadań*, PHU „DIP", Warszawa 1993.

Lech Stawikowski

# Z matematycznego lamusa

# Kalendarz olimpijski

*Rachuba czasu z podziałem na czteroletnie okresy zwane olimpiadami, zakończone wielkimi igrzyskami sportowymi sięga III w. p.n.e. Wtedy starożytni greccy historycy wprowadzili nowy sposób liczenia lat, zwany* ***erą olimpijską****. Skąd wziął się ten pomysł?*

Era to okres, jaki upłynął od ustalonego początku rachuby czasu.

### Punkt startowy na osi czasu

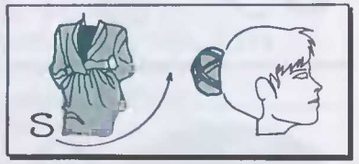
Oś czasu, podobnie jak zwykła oś liczbowa, jest z obu stron nieograniczona. Odkładamy na niej różne jednostki – wieki, lata, miesiące, jednak posługiwanie się taką osią byłoby niemożliwe bez ustalenia jakiegoś punktu odniesienia, od którego zacznie się liczenie lat. Powinno nim być niewątpliwie doniosłe wydarzenie historyczne (lub legendarne), nic więc dziwnego, że w różnych kulturach „zero" na osi czasu ustawione było w zupełnie innych miejscach.

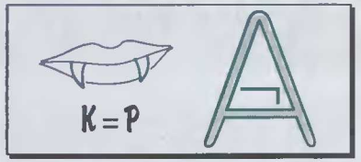
EGIPCJANIE umieścili na osi czasu wiele „zer", liczenie lat rozpoczynali bowiem wraz ze wstąpieniem na tron każdego nowego faraona, np. zjednoczenie Górnego i Dolnego Egiptu nastąpiło ok. V roku panowania faraona Menesa (tj. ok. 2850 r. p.n.e.). Wiele stuleci później na ten sam pomysł wpadli CHIŃCZYCY, rozpoczynając datowanie wydarzeń z każdą wstępującą na tron dynastią. I tak zjednoczenie rozproszonych chińskich państewek nastąpiło w I roku panowania dynastii Qin (czyli w 221 r. p.n.e).

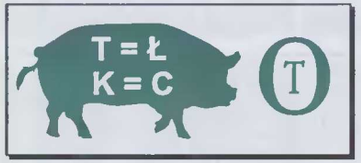
W okresie CESARSTWA RZYMSKIEGO początkiem nowej ery dla każdej prowincji była doniosła data przejścia pod władzę rzymską, np. dla Grecji był to rok 146 p.n.e., dla Egiptu 31 p.n.e., dla Półwyspu Iberyjskiego – 38 p.n.e. (ten sposób datowania stosowany był w Portugalii do 1422 r.). Z czasem zaczęto określać rok według nazwisk sprawujących władzę konsulów – była to tzw. **era konsularna**. Mówiono np. *Marco Pisone consulibus* – za konsulatu Marka Pizona. Wraz z upadkiem znaczenia konsula przyjął się wprowadzony przez Marka Terencjusza Warrona system datowania **od założenia Rzymu**. Daty podawano z dopiskiem „*a.u.c.*", co znaczy *Ab Urbe condita*, czyli „od założenia miasta" (ponieważ nastąpiło to w 753 r. p.n.e. miano „wiecznego miasta" wydaje się uzasadnione).

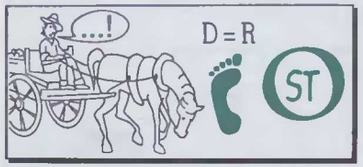
## REBUSY OLIMPIJSKIE

Odgadnij nazwy konkurencji sportowych. Rozwiązania wewnątrz numeru.










Za pomysły rebusów dziękujemy Pawłowi Wieczorkowi.

**Era buddyjska** – rozpoczęła się w dniu pełni księżyca w szóstym miesiącu 544 r. p.n.e. co stanowi tradycyjną datę śmierci Buddy. W kalendarzu hinduskim **era samwat** bierze swój początek w 57 r. p.n.e., co upamiętnia datę zwycięstwa króla Wikramaditji nad Sikhami. **Era mahometańska** datuje się od hidżry – ucieczki Mahometa z Mekki do Medyny, co przypadło na 16 VI 622 r. n.e. Natomiast początek **ery żydowskiej** liczy się od legendarnej daty biblijnego stworzenia świata, ustalonej przez rabina Hillela na 3761 r. p.n.e. (w tym przypadku oś czasu jest więc tylko półprostą).

W VI w. opat Dionizjusz Exiguus wprowadził **erę chrześcijańską**, przyjmując za punkt odniesienia datę narodzin Chrystusa – 25 grudnia roku 753 od założenia Rzymu. Dziś przypuszcza się, że Jezus urodził się ok. 5 lat wcześniej, niż ustalił to opat Dionizjusz, ale tradycyjnego początku ery chrześcijańskiej już nie zmieniono (można więc powiedzieć, że Chrystus urodził się w 5 roku przed narodzeniem Chrystusa). Rok poprzedzający erę chrześcijańską to pierwszy rok *ante Christum natum* – przed narodzeniem Chrystusa, a 1 stycznia 754 r. od założenia Rzymu rozpoczyna się pierwszy rok *post Christum natum* – po narodzeniu Chrystusa. Terminologia ta zachowała się do dnia dzisiejszego, jako że kalendarz, którym się posługujemy, stanowi spuściznę po okresie kościelnej rachuby czasu. Jeszcze przed wojną pisało się oficjalnie w języku polskim – „przed Chrystusem" i „po Chrystusie". W wielu krajach zwyczaj ten zachował się do dziś. Anglicy piszą – *B.C.* (*Before Christ*) i *A.D.* (*Anno Domini*, czyli *roku pańskiego*), podobnie jest we Francji (*avant J.Ch.* i *après J.Ch.*). Czterdzieści lat PRL zostawiło nam w spadku powszechnie stosowane dziś, zeświecczone skróty „*p.n.e.*" i „*n.e.*" przetłumaczone prawdopodobnie z niemieckiego „*v.u.Z.*" – *vor unserer Zeitrechnung* i „*u.Z.*" – *unserer Zeitrechnung*.

W okresie rewolucji francuskiej ustanowiono **erę republikańską**, umieszczając „punkt zerowy" kalendarza w dniu proklamowania republiki tj. 22 IX 1792 r. Według tego kalendarza mielibyśmy właśnie 212 rok ery republikańskiej.

## Era olimpijska

W okresie rozkwitu STAROŻYTNEJ GRECJI w rachubie lat ścierały się różne trendy, co prowadziło do wielkiego bałaganu. W oficjalnych dokumentach określano rok według nazwiska najwyższego urzędnika sprawującego władzę w danym okresie. Zapis taki obowiązywał jednak tylko w obrębie danego państwa-miasta, np. w Atenach coś wydarzyło się, *kiedy archontem był X*, a w Sparcie – *kiedy eforem był Y*, co uniemożliwiało wprowadzenie jednolitego systemu rachuby czasu. W IV w. p.n.e. za wspólny punkt odniesienia przyjęto datę zdobycia Troi (1183 r. p.n.e.), a w III w. p.n.e. historycy



wprowadzili **erę olimpijską**, przyjmując za punkt odniesienia datę pierwszych igrzysk w Olimpii (776 r. p.n.e.). Niestety wkrótce greckie miasta-państwa wprowadziły datowanie według ich miejscowych igrzysk: Korynt – wg dwuletnich istmiad (od igrzysk istmijskich), Delfy – czteroletnich pytiad (od igrzysk pytyjskich) itd. O ostatecznym przyjęciu ateńskiego systemu datowania wg olimpiad (od igrzysk olimpijskich) zadecydowało dzieło Timajosa, w którym zestawił on daty (i zwycięzców) poszczególnych olimpiad oraz chronologiczny wykaz ateńskich archontów, co niezwykle ułatwiło porównywanie dat zapisanych w różnych stylach.

Przyjmując za początek ery datę pierwszych igrzysk olimpijskich (776 r. p.n.e.), które organizowano co cztery lata, mówimy np., że rok 772 p.n.e był pierwszym rokiem drugiej olimpiady.

**Olimpiada** to okres czterech lat kończący się rokiem o numerze podzielnym przez cztery.

Cykl czteroletnich greckich olimpiad przyjął się również w numerowaniu igrzysk olimpijskich ery nowożytnej. Igrzyska odbywają się w czwartym roku olimpiady i są oznaczane jej liczbą. I olimpiada nowożytna (lata 1893–1896) zakończyła się igrzyskami w Atenach w 1896 roku. Kolejne igrzyska mogą z różnych przyczyn nie odbyć się, ale w żadnym razie nie mogą być przesunięte. I tak minione Igrzyska XXVI Olimpiady w Atlancie wcale nie były 26. igrzyskami, wcześniej nie odbyły się bowiem z powodu działań wojennych igrzyska VI olimpiady w 1916 r. oraz igrzyska XII i XIII olimpiady w latach 1940 i 1944. Igrzyska w Sydney w 2000 roku zakończyły XXVII olimpiadę, a igrzyska olimpijskie w Atenach w 2004 roku zakończą XXVIII olimpiadę nowożytną (chociaż igrzyska będą się odbywały wtedy po raz 25.).

Wynika z tego, że igrzyska olimpijskie wypadają w latach przestępnych, ale nie jest na odwrót: nie każdy rok olimpijski – czyli o numerze podzielnym przez 4 – jest przestępny. Trzeba pamiętać, że z czterech kolejnych lat sekularnych tzn. zakończonych dwoma zerami, tylko jeden jest przestępny – ten z liczbą wieków podzielną przez 4, np. lata 1700, 1800, 1900 nie były przestępne, a rok 2000 – był.

W kalendarzu juliańskim co czwarty rok był przestępny, więc wszystkie lata olimpijskie byłyby przestępne. Rok w tym kalendarzu rok trwał średnio 365,25 dnia. Jednak dokładna długość roku ziemskiego wynosi 365 d 5 h 48 min 48 s (≈ 365,2422 d), rok juliański był więc o 11,2 minuty za długi, a po upływie 128 lat nadwyżka ta kumulowała się do całego dnia (128 · 11,2 min = 1433,6 min ≈ ≈ 24 h). W efekcie np. równonoc wiosenna przesuwała się w kalendarzu o jeden dzień co każde 128 lat i Wielkanoc, która wg zasady ustalonej przez Sobór Nicejski (w 325 r.) przypada na pierwszą niedzielę po pełni Księżyca następującej po równonocy wiosennej, mogłaby wypadać o dowolnej porze roku. Dlatego w 1582 r. gdy za papieża Grzegorza XIII reformowano kalendarz juliański, skrócono mu średnią długość roku, wprowadzając opisaną wyżej zasadę. Dzięki temu w ciągu czterech stuleci „oszczędzamy" 3 dni, to jest tyle, ile tracił w tym samym czasie kalendarz juliański (3 · 128 lat = 384 lata). Dlatego w obowiązującym do dnia dzisiejszego kalendarzu gregoriańskim rok olimpijski i rok przestępny to niezupełnie to samo.

Małgorzata Mikołajczyk

### Zadania do samodzielnego rozwiązania

**1.** Gdybyśmy nadal posługiwali się kalendarzem juliańskim, w dniu równonocy wiosennej moglibyśmy witać Nowy Rok. Kiedy mogłoby to nastąpić?

**2.** Jaka jest średnia długość roku w kalendarzu gregoriańskim? O ile różni się od długości roku astronomicznego?

**3.** Gdyby nie wprowadzono systemu dodatkowych poprawek, kiedy kalendarz gregoriański „spóźniłby się" o jedną dobę?

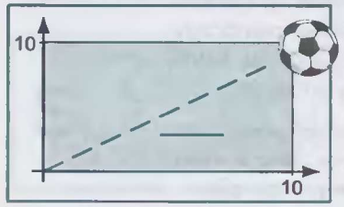
Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru

# Matematyka na klawiszach

# Igrzyska na ekranie

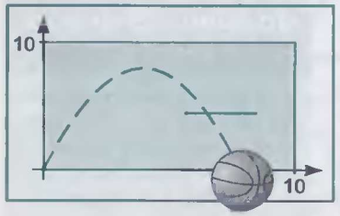
*Podczas igrzysk niejeden Czytelnik MMM zasiądzie przed telewizorem, aby z zaciśniętymi kciukami śledzić zmagania naszych sportowców. W przerwach proponujemy rozegranie kilku konkurencji na ekranie dowolnego kalkulatora graficznego. Podstawowym problemem jest odkrycie roli, jaką w równaniach funkcji odgrywają parametry. Aby sobie z tym poradzić wystarcza na ogół przeprowadzenie kilku eksperymentów z wykresami. Czasem ciekawsze od rozwiązywania może okazać się układanie podobnych zadań.*

## Konkurencje dla juniorów




### Piłka nożna

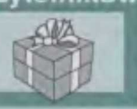
Na obu osiach ustawiamy zakres ⟨0, 10⟩. Z narożnika boiska – punkt (0, 0) – piłką chcemy trafić do bramki strzelając wzdłuż linii prostej $Y_2 = aX$, zmieniając współczynnik $a$. Bramka to wykres funkcji $Y_1 = \begin{cases} 3 \text{ dla } X \in (5, 8) \\ 0 \text{ dla } X \notin (5, 8) \end{cases}$. Na kalkulatorze wzór tej funkcji podajemy jako $Y_1 = 3(5 < X)(X < 8)$ w trybie pozwalającym rysować wykresy w sposób nieciągły. Jak wybrać $a$, by trafić? Po ilu strzałach się udało? Można zmieniać położenie i nachylenie bramki, np. przyjmując $Y_1 = \begin{cases} -X + 12 & \text{dla } X \in (3, 5) \\ 0 & \text{dla } X \notin (3, 5) \end{cases}$.




### Koszykówka

Kosz wygląda tak samo jak bramka. Rzucamy piłką z punktu (0, 0), ale tym razem leci ona wzdłuż paraboli $Y_2 = -aX(X - b)$. Jak zmieniać wartości $a$ i $b$, aby rzut był celny? Piłka powinna wpaść do kosza od góry i nie może dotknąć sufitu (tj. górnego zakresu $y$-ów). Teraz trudności są większe, bo lotem piłki sterują dwa parametry. Jeden odpowiada za zasięg lotu (który?). A który odpowiada za wysokość rzutu? Zabawę można powtórzyć dla innych położeń kosza.

**Zadania dla Czytelników**



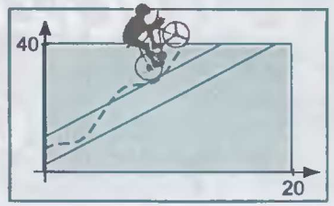
Na odpowiedzi czekamy do końca września.

1. Jak ustawić bramkę, aby najłatwiej było do niej trafić?
2. W sali gimnastycznej o wysokości 10 jako odcinek $AB$, $A(7, 7)$, $B(8, 7)$, umieszczony jest kosz. Podaj takie $a$, aby piłka rzucana z punktu (0, 0) i lecąca po paraboli $y = ax^2 + bx$ wpadła do kosza nie dotykając sufitu, jeśli:
   i) $b = 3$, ii) $b = 4$, iii) $b = 5$.
3. Znaleźć wszystkie parabole „trafiające" do ustalonego kosza.
4. Jak zagrać w ringo na ekranie „kartezjańskim"?
5. A w kosza na ekranie „parametrycznym"?



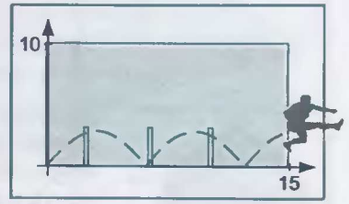
## Konkurencje dla seniorów

### Slalom rowerowy




Trasę zjazdu wyznaczają proste: $Y_1 = 2X + 1$, $Y_2 = 2X + 10$, a przejazd odbywa się wzdłuż krzywej $Y_3 = aX + b\cos X + c$. Zmieniając parametry należy tak poprowadzić linię przejazdu, aby nie wypaść z wyznaczonej trasy. Można zmieniać trasę (np. $Y_1 = 0.5X + 2$, $Y_2 = 0.5X + 5$) i technikę jazdy (np. $Y_3 = aX + \sin bX + c$).

### Bieg przez płotki



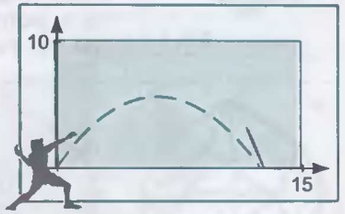

Płotki otrzymujemy podobnie jak bramkę i kosz, sumując kilka takich wyrażeń. Ponieważ są różne od zera na rozłącznych przedziałach, możemy użyć do tego jednej funkcji

$$Y_1 = 2(1 < X)(X < 2) + 2(5 < X)(X < 6) + 2(9 < X)(X < 10).$$

Przez płotki skaczemy po wykresie funkcji $Y_2 = \left|a \sin \frac{X}{b}\right|$, co wpisujemy do kalkulatora jako abs(a*sin(X/b) (abs to skrót angielskiego terminu *absolute value* oznaczającego wartość bezwzględną). Aby konkurencję utrudnić, można zróżnicować wysokość płotków i/lub odstępy między nimi. Jak?

## Konkurencje dla oldboyów

### Rzut oszczepem



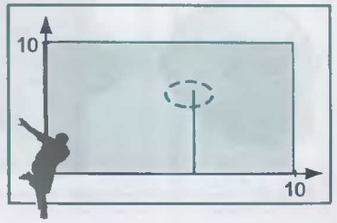

Lotem oszczepu sterujemy zmieniając kąt (w stopniach), pod jakim oszczep jest wyrzucany. Parametr ten wpisujemy jako wartość funkcji $Y_1$. Na początek ustawiamy np. $Y_1 = 65$. Oszczep leci wzdłuż linii: $Y_2 = X \tan Y_1 - 9.81(X/(12\cos Y_1))^2/2$, co jest równaniem ruchu w rzucie ukośnym, jeśli bowiem wyrzucimy oszczep pod kątem $\alpha$ do poziomu nadając mu prędkość $v$ ($v_x$ i $v_y$ to jej składowe pozioma i pionowa), to $y(t) = v_y t - \frac{gt^2}{2}$, gdzie $v_y = v\sin\alpha$, a $t = \frac{x}{v_x} = \frac{x}{v\cos\alpha}$, zatem

$$y(x) = v\sin\alpha \cdot \frac{x}{v\cos\alpha} - \frac{g \cdot (\frac{x}{v\cos\alpha})^2}{2} = x\tan\alpha - \frac{g \cdot (\frac{x}{v\cos\alpha})^2}{2},$$

co zgadza się z naszym równaniem dla $v = 12$. Wykresem tej funkcji jest parabola. Oczywiście naszym celem jest uzyskanie jak najdłuższego rzutu. Jak dobrać wartość kąta, pod którym należy wyrzucić oszczep?

### Ringo

W ringo zagramy używając funkcji w trybie parametrycznym. Zakres ekranu to ⟨0, 10⟩ na obu osiach układu współrzędnych, a zakres parametru $T$ zadajemy jako ⟨0, 2π⟩. Słupek, na który będziemy zarzucali ringo, wpisujemy np. jako funkcję $\begin{cases} X_{1T} = 6 \\ Y_{1T} = T. \end{cases}$ Obręcz ringo to wykres okręgu $\begin{cases} X_{1T} = 2(\cos T + a) \\ Y_{1T} = 2(\sin T + b). \end{cases}$




Gra polega na takim zmienianiu położenia obręczy (przez zmianę parametrów w równaniu okręgu), aby zarzucić ją na słupek.

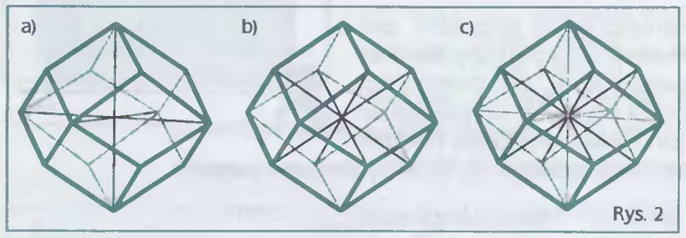
Małgorzata Mikołajczyk, Krzysztof Omiljanowski

# Gwiazdy z gwiazd dwunastu (2)

*W jednym z poprzednich numerów MMM zapowiadaliśmy prezentację interesującej bryły tworzącej parkietaż przestrzenny. Jest nią bohater dzisiejszego artykułu – dwunastościan gwiaździsty rombowy. Nazwa tej bryły może być myląca, gdyż jej ściany wcale nie są rombami, ale sposób jej konstrukcji tłumaczy taką właśnie nazwę.*

Rys. 1

Spójrzmy na keplerowski dwunastościan rombowy, którym zajmowaliśmy się dokładniej w MMM nr 4/2003 (rys.1). Ma on przystające ściany i dwa rodzaje wierzchołków – sześć, w których schodzą się 4 ściany, i osiem, w których schodzą się 3 ściany. Poprowadźmy w nim 3 przekątne łączące wierzchołki pierwszego rodzaju (rys. 2a), a następnie dołączmy 4 przekątne łączące wierzchołki drugiego rodzaju (rys. 2b). Wszystkie poprowadzone odcinki przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem symetrii całego dwunastościanu (rys. 2c), i wyznaczają w nim 12 przystających ostrosłupów. Ich podstawami są ściany bryły, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia siedmiu poprowadzonych przekątnych. Pojedynczy ostrosłup przedstawia rys. 3.

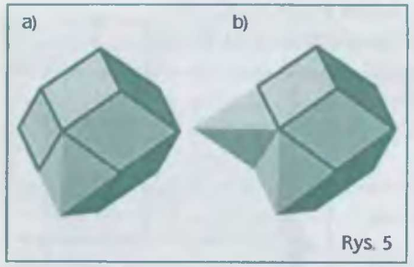



Rys. 2

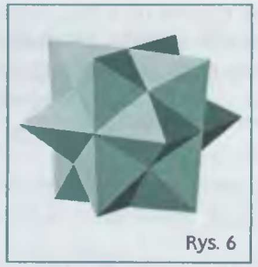
Popatrzmy teraz na nasz dwunastościan w taki sposób, aby widzieć jedynie trzy jego ściany stykające się w jednym punkcie (rys. 4). Widzimy wyraźnie... sześciokąt foremny. Kolorowe zewnętrzne linie na rysunku to nic innego, jak sześć widzianych „z profilu" ścian naszej bryły. Pozwala to podejrzewać, że kąty pomiędzy sąsiednimi ścianami w dwunastościanie rombowym mają miarę 120°. Tak jest w istocie. Oznacza to, że kąt między ścianą boczną a podstawą w powstałych ostrosłupach ma 60°. Jeżeli zatem jedną taką piramidkę przykleimy do zewnętrznej strony ściany dwunastościanu rombowego, to jej ściany boczne będą leżały w płaszczyznach innych ścian tego dwunastościanu (rys. 5a). Rys. 5b przedstawia dwunastościan z doklejonymi dwoma piramidkami, a rys. 6 gotową gwiazdę.

Rys. 3

Rys. 4



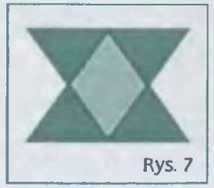

Rys. 5



Rys. 6

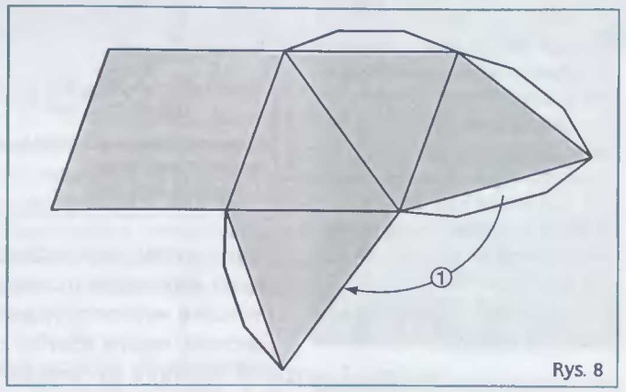


Ma ona dwanaście przecinających się ścian leżących w płaszczyznach ścian wyjściowego dwunastościanu rombowego. Każda z nich składa się z czterech trójkątów dołączonych do rombu z wyjściowego dwunastościanu (rys. 7). Sposób powstania gwiazdki tłumaczy w pełni jej nazwę.



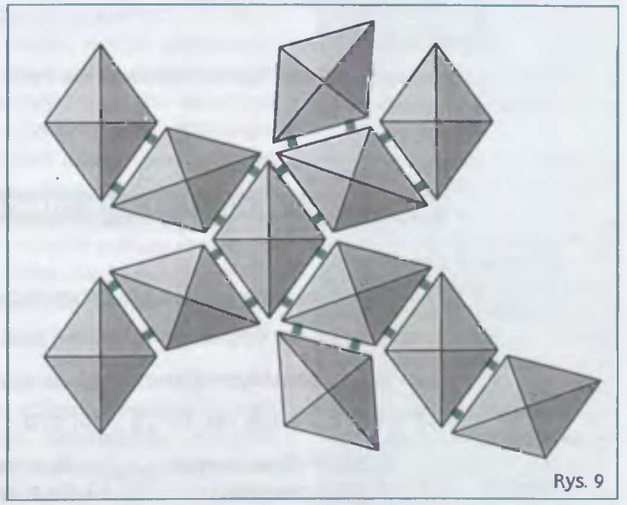
Rys. 7

Stali Czytelnicy tej rubryki z pewnością zauważyli, że wielokrotnie wcześniej opisywana metoda wykonywania modeli może być wykorzystana również i tym razem. Siatkę doklejanego ostrosłupa przedstawia rys. 8. Używając podwójnych skrzydełek należy skleić ze sobą 12 piramidek, tak aby ich podstawy utworzyły dwunastościan rombowy. Przy łączeniu piramidek należy pamiętać o dwóch rodzajach wierzchołków dwunastościanu rombowego.



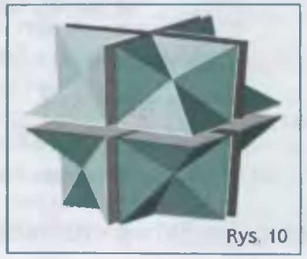
Rys. 8

Sposób konstrukcji naszej gwiazdki sugeruje, że można wykonać atrakcyjną zabawkę podobną do opisanej w numerze MMM 4/2003. Połączmy wstążeczkami 12 piramidek, tak aby ich podstawy tworzyły siatkę dwunastościanu rombowego (odstępy pomiędzy ostrosłupami powinny wynosić ok. 1–2 mm). Gotową zabawkę widzianą z góry przedstawia rys. 9. Wianuszek piramidek można zwinąć „do środka", uzyskując dwunastościan rombowy, bądź też owinąć wokół gotowego dwunastościanu uzyskując gwiazdkę. Należy oczywiście pamiętać, aby podstawy piramidek i ściany dwunastościanu były przystające.

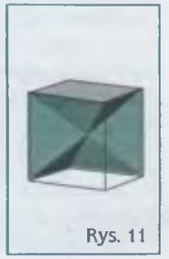


Rys. 9

Dwunastościanami rombowymi można wypełnić przestrzeń. Można to zrobić także opisywanymi gwiazdkami. Widać to z łatwością po wykonaniu i zestawieniu kilku modeli. Aby się o tym przekonać bez konieczności wykonywania modeli spójrzmy na nasz wielościan z nieco innej strony. Ma on 12 wierzchołków, które leżą po cztery w trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach (rys. 10). Nasz wielościan przecięty tymi płaszczyznami rozpadnie się na 8 przystających części, z których każda jest... połówką sześcianu (rys. 11).



Rys. 10

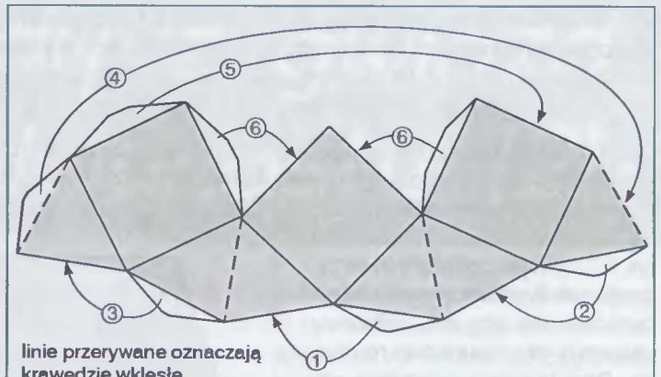


Rys. 11

## Zadania dla Czytelników

1. Co jest uwypukleniem opisanej dzisiaj gwiazdki?
2. W jaki sposób można szybko obliczyć jej objętość?
3. Jaki jest związek pomiędzy ścianami bocznymi a podstawami w piramidkach tworzących omawianą gwiazdę?
4. Czy kąty między ścianami bocznymi w tych piramidkach są jednakowe? Ile wynosi kąt między ścianami, które zostają rozdzielone przy cięciu gwiazdy jak na rys. 10?

Na odpowiedzi czekamy do końca września.




linie przerywane oznaczają krawędzie wklęsłe („zagięcie do góry")

Rys. 12

Siatkę jednej części sześcianu przedstawia rys. 12. Z ośmiu takich elementów możemy złożyć gwiazdkę lub obłożyć nimi gwiazdkę wykonaną wcześniej. Otrzymamy wówczas sześcian. Elementy można również połączyć wstążeczkami w jeden wianuszek. Znalezienie sposobu ich połączenia pozostawiamy jako (nietrudne) zadanie dla Czytelników.

LITERATURA

M. Cundy, H. Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1967.

Piotr Pawlikowski

## Odpowiedzi na „Pytania (nieco) przewrotne"

**1.** środek – współśrodkowe lub przystające, oś – zawsze, **2.** $\infty$ lub 1, **3.** prostą, **4.** np. 2 i 3, **5.** np. 8 i 9, **6.** nie ma takich liczb ($348 \nmid 6\,970\,000\,000\,230$), **7.** nie ma rozwiązań całkowitych (lewa strona parzysta, prawa – nieparzysta), **8.** nie, np. $\sqrt{2}$ i $1-\sqrt{2}$, **9.** tak, np. $1+\sqrt{2}$, **10.** 0 i 2, **11.** nie, np. $e=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots$, **12.** tak, np. $a_n=\begin{cases}0 \text{ dla } n \text{ nieparzystych}\\1 \text{ dla } n \text{ parzystych,}\end{cases}$ $b_n=\begin{cases}1 \text{ dla } n \text{ nieparzystych}\\0 \text{ dla } n \text{ parzystych,}\end{cases}$ **13.** tak, np. $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots, \frac{1}{n}, n, \ldots$, **14.** tak, np. obcięcia rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{2}$ do kolejnych miejsc dziesiętnych lub $(1+\frac{1}{n})^n$, **15.** tak, np. $\frac{\sqrt{2}}{n}$, **16.** tak, np. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ dla } x \text{ wymiernych}\\0 \text{ dla } x \text{ niewymiernych,}\end{cases}$ **17.** $x^6-4x^3-1$, **18.** tak, np. $x+\sin x$, **19.** 0 ($f$ jest różniczkowalna w punkcie 1 i ma tam ekstremum), **20.** $-\cos x$ (bo $f^{(4n)}(x)=\sin x$), **21.** tak, np. $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^2\cdot g(x)$ gdzie $g(x)=\begin{cases}1 \text{ dla } x \text{ wymiernych}\\0 \text{ dla } x \text{ niewymiernych.}\end{cases}$

Redakcja
Olimpijska
Trójkąt
Trapez
Gimnastyka
Rugby
Piłka nożna
Pływanie
Skok o tyczce
Stadion
Lekkoatletyka
Bieg przez płotki
Widownia

# Z notatnika starego belfra

# Równanie w dół

Kolejnym etapem reformy oświaty, w który właśnie wchodzimy, są zmiany w zasadach przyjmowania na studia wyższe. Po zapowiedziach, że nowa matura ma być podstawą rekrutacji na studia, wydawało się, że uczelnie stawią opór tej idei; pomysł reformatorów oznaczał przecież przesunięcie rekrutacji o szczebel w dół, po czym trudno nie spodziewać się pogorszenia jakości. Analogiczne przesunięcie na styku gimnazjum-szkoła średnia, znajduje jeszcze uzasadnienie w trudnej sytuacji psychologicznej niedojrzałego szesnastolatka, ale jest oczywiste, że i liceum, i szkoła wyższa wolałyby same móc dobrać sobie uczniów i studentów zamiast godzić się, by zrobił to za nie, zapewne gorzej, ktoś inny.

Obecne rozstrzygnięcia prawne zmusiły uczelnie do zaakceptowania nowego systemu. Od 2005 roku egzaminy wstępne, o ile w ogóle miałyby istnieć, nie mogą dotyczyć przedmiotu objętego nową maturą. Uczelniane przepisy muszą jednak przewidzieć osobne ścieżki dla kandydatów ze starą maturą, uzyskaną wcześniej. Przy okazji dokonuje się próba obejścia zakazu egzaminowania nowych maturzystów: niektóre uczelnie dopuszczają egzamin wstępny, w przypadku gdy kandydat akurat danego przedmiotu na nowej maturze nie zdawał albo gdy wynik z nowej matury ustawiał kandydata za nisko w rankingu. Czy w takim wypadku nie rzucą się zdawać po prostu wszyscy? Uczelnie walczą o swoje, jak umieją, nie zawsze z korzyścią dla uczniów. Jeżeli intencją reformy było uproszczenie tego etapu i oszczędzenie uczniom podwójnego egzaminowania, czy nie należało raczej zlikwidować matury?

Widzę dwie poważne konsekwencje nowego systemu dla nauczania szkolnego. Po pierwsze uczniowie zostaną zmuszeni do zainwestowania raczej w ilość niż w jakość. „Obstawiając" różne kierunki, będą się starali uzyskać na świadectwie maturalnym możliwie dużo dobrych ocen na poziomie rozszerzonym. To jednak oznacza konieczność uczęszczania na lekcje z kilku przedmiotów w rozszerzonym wymiarze godzin. Szkoła będzie musiała taką naukę zorganizować, a uczeń wytrzymać ją kondycyjnie. Obawiam się, że przy podobnym stawianiu „na ilość" poziom osiągany na zajęciach rozszerzonych nie będzie tak wysoki, jak należałoby się tego domagać. Dawne „mat-fizy" to już chyba legenda przeszłości. Druga konsekwencja to brak w ostatniej klasie liceum supersilnego „napędu" do nauki, jakim były egzaminy wstępne. Brak swoistego wyzwania – nowa matura dla zdolniejszych uczniów

## Wyłowione z sieci (3)

**Wirtualna Biblioteka Nauki**
**Kolekcja matematyczno-fizyczna**

http://matwbn.icm.edu.pl/

Można tu znaleźć w postaci fotokopii w plikach PDF kilkadziesiąt dzieł matematycznych stanowiących kanon polskiej nauki oraz ponad 6 tysięcy prac, które ukazały się w seriach: Acta Arithmetica, Annales Polonici Mathematici, Banach Center Publications, Colloquium Mathematicum, Fundamenta Mathematicae, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Rozprawy Matematyczne, Studia Mathematica oraz 40 monografii matematycznych, między innymi: *Zasady algebry wyższej* i *Teorię liczb* Sierpińskiego, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego* Kuratowskiego, *Logikę matematyczną* Mostowskiego i *Mechanikę* Banacha.

cd. s. 33

takim wyzwaniem nie jest, bo nawet na poziomie rozszerzonym stawia wymagania bardzo przeciętne. Brak też obfitego materiału ćwiczeniowego, jakim były dotychczas tematy egzaminów z poprzednich lat, przerabiane przez uczniów w przedegzaminacyjnej gorączce, tematy trudniejsze niż maturalne i przede wszystkim inteligentniejsze, obliczone na wydobycie dorosłejszych umiejętności, właśnie takich, jakich oczekuje od kandydata uczelnia (jedyny pozytywny efekt tego braku, to ukrócenie przemysłu kursów przygotowawczych, na które uczniowie dotąd zapisywali się masowo z nerwów raczej, niż z rzeczywistej potrzeby). Nic, niestety, nie zapowiada, by tematy na nowej maturze były inteligentne, a zapoznanie się z „kluczami odpowiedzi" rodzi obawy, że będą także nieinteligentnie sprawdzane – najlepsi uczniowie mogą w takiej sytuacji wcale nie uzyskać oceny, na jaką zasługują.

Jest więc ten ostatni akcent reformy kolejnym przykładem równania w dół, zasady, która tak mocno wyziera także z innych zmian, jakie się już dokonały. Może nie było to zamierzone, ale jest przecież łatwo widoczne od samego początku reformy – czy zatem jakoś „wkalkulowane"? Oceniam, że absolwenci z nową maturą w kieszeni będą pod względem swojego wykształcenia mniej więcej dwa lata „do tyłu" w porównaniu z wychowankami starego systemu i tacy zostaną przyjęci na wyższe studia. Kto i kiedy to nadrobi?

Adam Smólski

Wskazówki/odpowiedzi do 5–10–15–20: 5) Urodzili się przed i po północy. 10) Urodzili się w nocy z 28 na 29 lutego. 15) Urodzili się przed i po północy na linii zmiany daty. 20) 8 lat. Urodzili się w nocy z 28 na 29 lutego w roku np. 1896.


**Punkty patronackie prowadzące sprzedaż bieżących i archiwalnych numerów MMM**

Księgarnia JEREMIASZ
w budynku Akademii Świętokrzyskiej
25-406 **Kielce**, ul. Konopnickiej 15

Kiosk w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego
30-059 **Kraków**, ul. Reymonta 4
tel. (0-12) 632 48 88 w. 5723

Handel Książkami TETJA Józef Siwy
43-170 **Łaziska Górne**, ul. Działkowców 5
tel/faks (0-32) 224 30 99, SMS 0-502 300 382,
e-mail: jsiwy@silesianet.pl

Księgarnia Pedagogiczna
Łódzkiego Stowarzyszenia Pomocy Szkole
90-531 **Łódź**, ul. Wólczańska 202
tel. (0-42) 636 83 26

Polskie Towarzystwo Matematyczne
Oddział Sądecki
33-300 **Nowy Sącz**, ul. Jagiellońska 61
tel. (0-18) 443 68 99

Biuro Handlowe Wydawnictwa NOWIK
45-056 **Opole**, ul. Katowicka 39, pok. 110
tel. (0-77) 454 36 04

Radomski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli
26-600 **Radom**, ul. Żeromskiego 53
tel. (0-48) 363 06 81, faks (0-48) 360 00 65

UNKA Anna Semeniuk
budynek L Politechniki Rzeszowskiej
35-329 **Rzeszów**, al. Powstańców Warszawy 8

Książki i Pomoce Dydaktyczne
Marek Matejuk
58-309 **Wałbrzych**, ul. Wrocławska 45
tel./faks (0-74) 843 43 09, (0-74) 849 06 90
www.matejuk.pl e-mail: sklep@matejuk.pl

Kiosk na Wydziale Matematyki, Informatyki
i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego
02-097 **Warszawa**, ul. Banacha 2
tel. (0-22) 554 41 36

Kiosk w Gmachu Głównym Politechniki
Wrocławskiej
50-370 **Wrocław**, Wybrzeże Wyspiańskiego 27
tel. (0-71) 320 28 61

Księgarnia DANIEL Grzegorz Drewniak
51-410 **Wrocław**, ul. Brücknera 10
tel. 0-507 049 874, e-mail: info@mat.edu.pl

Księgarnia KWANTUM
50-067 **Wrocław**, ul. Świdnicka 6a
tel. (0-71) 342 04 20
e-mail: kwantum@beta-fk.pl

Księgarnia przy Dolnośląskim Ośrodku
Doskonalenia Nauczycieli
50-527 **Wrocław**, ul. Dawida 1A
tel. (0-71) 336 99 74

Punkt ksero w Instytucie Matematycznym
Uniwersytetu Wrocławskiego
50-384 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4
tel. (0-71) 375 74 14 (prosić ksero)

Bieżące numery są również do nabycia w salonach prasowych RUCH S.A. i EMPIK.


# Między nami, szperaczami

# Forum Czytelników

http://www.mmm.lg.pl

Zaczęło się od tego, że chciałam uzyskać zadania treningowe dla uczestników mistrzostw w GMiL dla swojego ucznia, który zakwalifikował się do krajowego finału. Dlatego zamówiłam MMM 2/2004. Uczniowi dałam zadania, a sama przejrzałam czasopismo, myśląc, że znajdę w nim coś dla siebie, a raczej dla swoich uczniów (jestem nauczycielką matematyki w SP).

Po pobieżnych oględzinach kilku początkowych stron stwierdziłam, że to na podstawówkę za trudne i pewnie dałabym sobie spokój, gdybym nie natknęła się na artykuł *Wyπjmy za zdrowie π*. Liczba π inspiruje mnie od dawna, a zainteresowanie nią przekazałam też swoim uczniom. Razem poznajemy jej historię, urządzamy konkursy... Bardzo wciągnęły mnie πbusy. Nie miałam nigdy wcześniej MMM w ręku, więc nie wiedziałam, że dalej znajdują się rozwiązania. Męczyliśmy się nad nimi bardzo, a i tak dwóch nie udało nam się rozwiązać. Dopiero po trzech dniach znalazłam odpowiedzi. Sam artykuł o liczbie π był dla mnie i moich uczniów prawdziwą „uczta matematyczną".

Gdy już pochłonęłam liczbę π i skorzystałam z wkładki z zadaniami, zaczęłam przeglądać pismo jeszcze raz, wgłębiając się w szczegóły. Zauważyłam, że na każdej stronie znajduję coś ciekawego, co będę mogła wykorzystać na zajęciach kółka matematycznego i w pracy z uczniami zdolnymi. Obecnie mam dwóch uczniów w klasie szóstej, którzy mają specyficzne potrzeby matematyczne, i stale muszę im coś nowego i ciekawego podsuwać, aby te potrzeby zaspokoić.

Gdy przejrzałam całe czasopismo, na koniec, tak od niechcenia, przeczytałam wstępniak. Znalazłam tam zdanie: *Z pozoru nic nowego, ale przy uważnej lekturze na pewno spotka Was wiele niespodzianek*. Jak ulał pasowało do mnie. Po powierzchownym przejrzeniu pisma stwierdziłam, że raczej nie znajdę tu nic dla siebie, a po uważnej lekturze okazało się, że prawie wszystko jest dla mnie i moich uczniów. Teraz materiałów do pracy wystarczy mi chyba na cały rok, bo Paweł z finału mistrzostw w GMiL przywiózł wszystkie archiwalne numery. Tak zaczęła się nasza przygoda z MMM. Wielkie dzięki za to czasopismo. Jest wspaniałe. Karola Koźlicka z Budzisławia Kościelnego

Przy opracowywaniu kolejnych numerów pisma mamy świadomość, że miłośnikiem matematyki można być bez względu na wiek. Dostajemy wiele listów zarówno od uczniów szkół podstawowych jak i zawodowych matematyków. Bardzo trudno tak dobrać zawartość pisma, żeby Ci drudzy nie byli znudzeni, a Ci piewsi też znaleźli coś dla siebie. Staramy się jak możemy i jest nam miło jeśli Czytelnicy to doceniają. Czekamy na Wasze opinie i propozycje. redakcja

## Wyłowione z sieci (4)

**Strona Sir Jokera**

http://sirjoker.w.interia.pl

Zawartość tej witryny może służyć wszystkim, którym potrzebna jest szybka powtórka z podstaw matematyki wyższej i programowania. Na stronie prezentowane są standardowe wykłady ze wstępu do matematyki, analizy matematycznej i numerycznej, matematyki dyskretnej i rachunku prawdopodobieństwa oraz przykładowe programy w języku C++ dotyczące typowych zagadnień matematyczno-programistycznych. Dotarcie do potrzebnego zagadnienia ułatwia przejrzysty układ menu.

wyłowił Wojciech Głodek

# Łamanie głowy, czyli burza w mózgu

# Zadania konkursowe

**Skrót regulaminu konkursu**

- W każdym numerze ogłaszanych jest 15 zadań (są to m.in. łamigłówki, zagadki lateralne, rebusy oraz zadania związane z publikowanymi w danym numerze artykułami).
- Uczestnik konkursu otrzymuje tyle punktów, ile wynosi liczba zaliczonych zadań.
- Po uzbieraniu 33 punktów uzyskuje się tytuł *Eksperta Łamania Głowy*, co zostaje ogłoszone na łamach MMM. Po trzykrotnym zdobyciu tego tytułu zostaje się *Mistrzem Łamania Głowy*, co potwierdzane jest dyplomem. Trzykrotne zdobycie tytułu *Mistrza* skutkuje przyznaniem tytułu *Arcymistrza Łamania Głowy* i specjalnej odznaki.

*Zachęcamy do udziału w konkursie zadaniowym MMM. Dotychczasowe wyniki dostępne są na naszej stronie internetowej. Rozwiązania zadań z bieżącego numeru można przesyłać do 30 września 2004. Decyduje data stempla pocztowego. W losowaniu nagród pieniężnych biorą udział tylko rozwiązania z dołączonym kuponem konkursowym zamieszczonym na ostatniej stronie.*

Do grona *Ekspertów Łamania Głowy* dołączyli:

**Piotr KUMOR**, Olsztyn (41);
**Łukasz GOLISZEWSKI**, Żelechów (40);
**Sabina JANECKA-MASTALERZ**, Zielona Góra (39);
**Antoni SZENDERA**, Katowice (39);
**Patryk GRABOWSKI**, Łódź (35);
**Anna SAWICKA**, Olszewnik (35).

Gratulujemy i życzymy jak najszybszego powtórzenia sukcesu.

## 1. Wyścig piechurów

Dobry piechur przechodzi 100 kroków, podczas gdy kiepski przechodzi 60. Ten ostatni wyprzedza pierwszego o 100 kroków. Po ilu krokach dobry piechur go dogoni?

## 2. Silny wielokąt

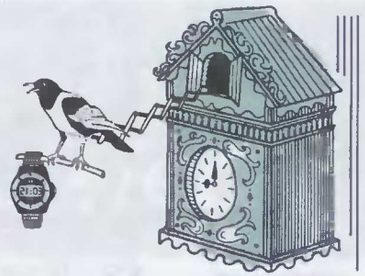
W jakim $n$-kącie suma kątów wynosi $n!$ stopni?

## 3. Na torze wyścigowym

Po torze wyścigowym w kształcie okręgu o promieniu 80 cm poruszają się dwie mrówki – Andzia i Wandzia. Jeżeli kierunki ich ruchów są zgodne, to Andzia wyprzedza Wandzię co minutę. Jeśli są przeciwne, to mrówki mijają się co 24 s. Z jaką prędkością porusza się Wandzia?



## 4. Ten zegar stary...



Profesor Sędziwy gotuje jajko przez 4 minuty, ale nie używa przy tym zwykłego zegarka, tylko dwóch klepsydr. Jedna z nich odmierza 8, a druga 3 minuty. Skąd profesor wie, kiedy jajko jest gotowe?

## 5. ... a ten nowy

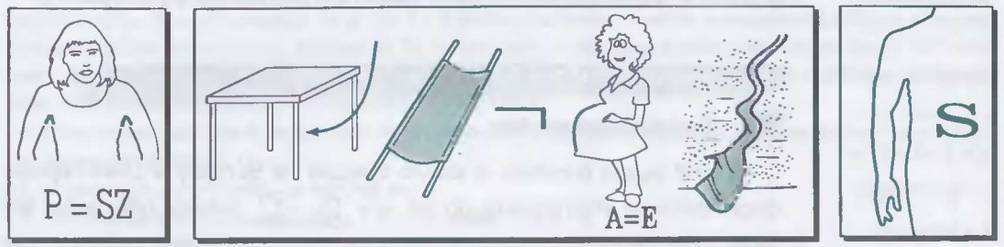
Zegarek elektroniczny pokazujący godziny i minuty (godziny pokazuje do 23) leży na stole pomiędzy Jasiem i Małgosią, którzy siedzą naprzeciw siebie. Każde z nich spojrzało na zegarek i odczytało pewną godzinę (niekoniecznie tę samą). Ile czasu w ciągu doby może zajść taka sytuacja?

## 6. Jak pies z kotem

Pies dostrzegł w odległości 60 m kota i rozpoczął pościg. Skok psa ma długość 2 m, a skok kota 1 m. Pies oddaje dwa skoki w tym samym czasie, w jakim kot trzy. Czy pies dogoni kota? Jeśli tak, to po ilu metrach?

## 7. Sportowe rebusy

Co to za konkurencje?




## 8. Imieninowe algebrafy

11 lipca wypadają imieniny Olgi. To zadanie dedykujemy więc wszystkim solenizantkom. Różnym literom odpowiadają różne cyfry i na odwrót. Trzy litery zapisane obok siebie nie oznaczają iloczynu, tylko liczbę trzycyfrową. Co to za działania?

a) $O^3 + L^3 + A^3 = OLA$

b) $(O + L + A)^3 = OLA$

## 9. Zapałczana przekładanka

Z zapałek ułożono trzy kwadraty. Jeśli przełożysz 2 zapałki i zabierzesz jedną, zostanie jeden. Jak to zrobić?

## 10. Sztuczka z podzielnością

Między cyfry dwucyfrowej liczby $x$ wstawiamy zero i od otrzymanej w ten sposób liczby odejmujemy $x$, otrzymując liczbę podzielną przez $k$. Dla ilu naturalnych wartości $k$ jest to możliwe?

## 11. Kwadrat z połówki

Na rysunku mamy 3 figury. Ułóż z nich kwadrat.

## 12. Sezon na przetwory

W garnku pasteryzowane są trzy słoiki styczne do siebie zewnętrznie i styczne do ściany garnka. Ile razy mniejszej średnicy słoiki trzeba wziąć, aby w tym samym garnku zmieściły się cztery słoiki styczne do siebie i do garnka?

## 13. Szalone ZOO

Jeżeli kot, to pies, ale jeżeli pies, to nie kot. Jeżeli łoś, to nie sarna, ale jeżeli łoś, to koza. Jeżeli słoń, to zebra, jeżeli słoń, to jeleń, jeżeli jenot, to szakal, jeżeli sarna to żyrafa. W takim razie jeżeli antylopa, to co?

## 14. Symetryczny sześciokąt

Czy istnieje sześciokąt równoboczny, który ma dokładnie 3 osie symetrii?

## 15. Zagadkowy ciąg

W ciągu arytmetycznym różnice wyrazów sąsiednich są stałe, a każdy wyraz (oprócz pierwszego) jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. A jak jest w ciągu, w którym różnice wyrazów sąsiednich tworzą ciąg arytmetyczny?

Za pomysły zadań wykorzystanych w tym numerze dziękujemy:
Łukaszowi Goliszewskiemu,
Adamowi Morawcowi,
Piotrowi Pawlikowskiemu,
Ryszardowi Rudnickiemu,
Pawłowi Wieczorkowi.

1 = (2 + 0 + 0) √4
2 = 2 + 0 + 0 · 4
3 = 2 + 0! + 0 · 4
4 = (2 - 0! + 0) · 4
5 = 20 : (0 + 4)
6 = 2 + 0 + 0 + 4
7 = 2 + 0! + 0 + 4
8 = (2 + 0 + 0) · 4
9 = (2 + 0!) · (-0! + 4)
10 = (2 + 0) (0! + 4)
11 = (2 + 0!)! + 0! + 4
12 = (2 + 0 : 0) · 4
13 = (2 + 0!)! - 0! + 4!!
14 = 20 - (0! + √4)
15 = 20 - 0! - 4
16 = 20 + 0 - 4
17 = 20 + 0! - 4
18 = 20 + 0 - √4
19 = 20 + 0! - √4
20 = 20 + 0 · 4

### Odpowiedzi do zadań z artykułów:

#### *Podwórkowe gonitwy*

1. Niech $P$ będzie punktem, w którym znajdzie się Bonifacy w chwili największego zbliżenia. Wyznaczamy go tak, aby $\frac{AP}{BP} = \frac{25}{20}$ (istnieje tylko jeden taki punkt – dlaczego?). Na tak wyznaczony punkt $P$ ma się kierować Azor, aby najbardziej zbliżyć się do Bonifacego. Odp. 3 metry.

2. Należy narysować okrąg Apoloniusza, a następnie wybrać najbardziej odległy „suchy punkt". Odp. Ok. 12 s.

3. Długość drogi każdego z psów jest równa długości boku kwadratu (dlaczego?). W przypadku $n$-kąta długość drogi każdego z psów wynosi $\frac{d}{1+\cos\alpha}$, gdzie $d$ jest długością boku wielokąta, a $\alpha$ miarą jego kąta wewnętrznego.

#### *Kalendarz olimpijski*

1. W 325 r. – roku Soboru Nicejskiego – równonoc wiosenna wypadła 21 III, po 128 latach już 20 III i cofała się w kalendarzu o 1 dzień co 128 lat. Wypadłaby 1 I w CVI wieku.

2. Rok gregoriański jest o 26 s za długi.

3. W XLIX wieku.



# Wyniki i podpowiedzi

## Rozwiązania zadań konkursowych z numeru 1/2004

1. W smażalni. 3 minuty.
2. Zegar ze sznurka. Należy podpalić sznurek jednocześnie z obu końców, po 30 min spali się całkowicie.
3. 100 lat! 43127 + 95127 = 138 254.
4. Raz-dwa-trzy. 81 liczb.
5. O pisarczyku. $151 = 9 + 2 \cdot 71$, jest to więc cyfra jedności 71. liczby dwucyfrowej (którą jest 80), czyli 0.
6. Dziecinna zagadka. 6, 4, 24 i 10 lat.
7. Skąpstwo kreślarza. Mimo prawidłowego opisu konstrukcji wielu czytelnikom zabrakło cierpliwości, aby dokładnie obliczyć jej koszt. Załóżmy, że początkowe rozwarcie cyrkla jest jednostkowe. $\left(\frac{\sqrt[8]{2}}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^6 \cdot \sqrt[8]{2}}$ (te działania muszą się pojawić w konstrukcji). Rysujemy prostą i okrąg jednostkowy o środku w punkcie tej prostej (7 zł). Konstrukcję $\sqrt[8]{2}$ wykonujemy w trzech krokach: $\sqrt{2}$ – z trójkąta o przyprostokątnych 1 (wykorzystujemy narysowany już okrąg) – kosztuje 13 zł i po 24 zł płacimy za każde z dwóch pierwiastkowań (wykorzystujemy wcześniejsze elementy rysunku). Odcinek $64\sqrt[8]{2}$ konstruujemy przez kolejne odkładanie wielokrotności $\sqrt[8]{2}$ (mnożenie z tw. Talesa jest droższe). Ten etap kosztuje 36 zł. Pozostaje znalezienie odwrotności z tw. Talesa. To kolejne 22 zł. Cała konstrukcja danego odcinka kosztuje więc 126 zł.
8. Ence-pence. Jeśli wynik jest parzysty, parzysta liczba monet jest w lewej ręce, jeśli nieparzysty – w prawej.
9. Równanie funkcyjne. 12.
10. O pisarczyku i skreślaczu. 99 999 795 960.
11. Co za dydelf! Każda litera kosztuje 3 zł, wiec dydelf – 18 zł.
12. Feralna klasówka. Działanie to np. 99 · 69, a jeden uczeń odwrócił kartkę do góry nogami.
13. Forsowny anagram. Trasa miała 24 km. Zawodnik pobiegł forsownie i bardzo się zmęczył, ale po krótkim odpoczynku pokonał dłuższą trasę 4! km
14. Na bocznicy. Tak, jeśli wypełnimy go np. balonikami z helem.
15. Nogi, nogi, nogi... Przy stole na trójnogim stołku siedział człowiek i jadł udko kurczaka, gdy przyszedł pies i mu je porwał. Wtedy człowiek rzucił w psa stołkiem i odzyskał obiad.

## Wyniki konkursów z numeru 1/2004

Szczegółowe wyniki dostępne są na stronie http://www.mmm.ig.pl. Nagrody pieniężne otrzymują (w nawiasie podajemy liczbę zaliczonych zadań):

200 zł – Tomasz **CIEJKA**, Kraków (13);

100 zł – Mateusz **LEWARTOWSKI**, Dębica (13); Ryszard **RUDNICKI**, Włocławek (12); Antoni **BĄKOWSKI**, Kielce (10); Jakub **PURSKI**, Rawa Mazowiecka (10); Janusz **WOJTAL**, Warszawa (10);

50 zł – Mirosława **BEDNARSKA**, Bodzentyn (13); Patryk **GRABOWSKI**, Łódź (12); Urszula **KASPERSKA**, Wrocław (9); Patryk **DROBIŃSKI**, Bydgoszcz (9); Michał **KORTAS**, Barcin (9); Tomasz **BOGDANOWICZ**, Radzyń Podlaski (8); Magdalena **MICHALAK**, Jelenia Góra (8); Jarosław **KRÓL**, Żelechów (7); Sławomir **KOSZELEW**, Białystok (6); Ewa **ANDRASZ**, Olsztyn (5).

Nagrody książkowe za rozwiązania *Zadań dla Czytelników* z artykułów *Pierwszy gigant*, *Rozkosze Łamania Głowy* i *Opakowania i inne rombościany* otrzymują: Monika **CZEKAŁA**, Pietrowice Wielkie; Anna **KOŁODZIEJ**, Mniów i Michał **PASZENDA**, Żory.

Nagrodę za rozwiązanie zadań z finału paryskiego Międzynarodowych Mistrzostw w GMiL otrzymuje: Edward **PYPNO** z Katowic, a za rozwiązanie zadań z konkursu „Mathematics Without Limits" – Piotr **KUMOR** z Olsztyna.

Nagrody – niespodzianki w konkursie na wyrazy i zdania z osią symetrii otrzymują: Kamil **HAWDZIEJUK**, Łęczna i Sławomir **KOSZELEW**, Białystok.

MOTTOM
ON ZNOSI Z SZOS SOS ZOSI
TOWOT
MATAM

# Rozwiązania z numeru 2/2004

## Zadania z II etapu eliminacji do Mistrzostw Polski w GMiL

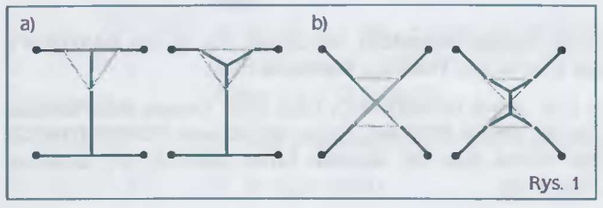
Pożyczka. 64 grosze. Konkursowe zadanie. W finale brało udział co najwyżej 3 uczniów. Możliwe rozwiązania: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15 lub 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14. Odważniki. Minimalna waga zestawu to 33 g. Możliwe zestawy odważników: 1, 1, 3, 5, 5, 5, 13; 1, 1, 3, 3, 5, 7, 13 lub 1, 1, 1, 3, 7, 7, 13. Tajemnicza liczba. 239. Podział trawnika. Jeden z możliwych podziałów przedstawia rysunek. Trójkąt i koła. Obwód trójkąta wynosi 82 cm, a jego pole 205 cm$^2$. Suma ułamków. $\frac{179540}{3}$. Kryptarytm poligloty. NINE = 9096, THREE = 13266, NINE × THREE = 120 667 536.

## Zadania z artykułu *Punkt Torricellego*

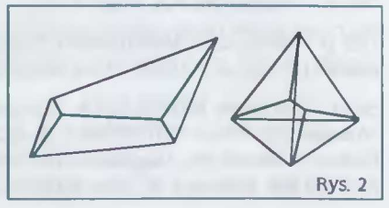
Lista nagrodzonych w następnym numerze.

**1.** W trójkącie równobocznym każdy punkt ma taką samą sumę odległości od boków (p. MMM nr 3/2003 *Osiołek na pastwisku*). W trójkącie równoramiennym o kącie w wierzchołku większym niż 60° najmniejszą sumę odległości od boków ma dowolny punkt podstawy. W pozostałych trójkątach jest to wierzchołek kąta o największej mierze.

**3–5.** Każde rozgałęzienie minimalnej sieci rozpiętej na $n$ punktach ($n > 2$) tworzą trzy odcinki rozchodzące się pod kątami 120°. Jest tak zarówno na płaszczyźnie, jak i w przestrzeni. Gdyby w sieci minimalnej istniało innego typu rozgałęzienie, to „zamykając je" w odpowiednim trójkącie można by zmniejszyć długość sieci zawartej wewnątrz tego trójkąta, a zatem i jej długość całkowitą (np. tak, jak na rys. 1), co przeczyłoby minimalności sieci. Rozumowanie to stosuje się także w przypadku przestrzennym (dlaczego?). Zatem sieci minimalne dla czworokąta i czworościanu powinny wyglądać tak, jak na rys. 2. Jak je skonstruować? Do tego tematu powrócimy w następnych numerach.



Rys. 1


Rys. 2



## Zadania z artykułu *Wyπjmy za zdrowie π*

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

**1a)** Na miejscach 7, 25, 45, 65 i 85. **1b)** 2 (pierwsza cyfra liczby 22), 7 (druga siódemka w 177). **1c)** Nieskończenie wiele. **1d)** 0,100101102103104... Nie ma takich liczb wymiernych, bo gdyby była i zapisalibyśmy ją jako $0{,}c_1c_2c_3 \ldots c_k(o_1o_2 \ldots o_m)$, gdzie okres nie może zacząć się od żadnego z miejsc $c_1$, $c_2$, ... $c_k$, to w żadnym jej zapisie dziesiętnym nie ma liczby $c_1c_2c_3 \ldots c_ko_1o_2 \ldots o_mp$, gdzie $p$ jest różne od 0, 9, $o_1$ i $o_m$. **1e)** 0,23412345678..., 3,1512345678...

**2a)** Przykłady takich liczb to 12345, 43512; 123456789110, 110123456789. **2b)** stopnia 10: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1$ (ustawiamy w pewnej kolejności liczby 2, 3, 4, ..., 10); stopnia 11: tyle samo (zamiast 10 piszemy 110); stopnia 12: $2 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1)$ (ustawiamy w pewnej kolejności liczby 3, 4, 5, ..., 9, 10, 12 i dopisujemy 1 przed 10 albo 12); stopnia 13: $3 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1)$ (ustawiamy 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13 i dopisujemy 1 przed 10, 12 lub 13), stopnia 19: $9 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1)$ (ustawiamy 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 i dopisujemy 1 przed jedną z tych liczb). **2c)** 100112013014015016017018019021223141... (Ile ma cyfr?). **2d)** Tak. **2e)** Na pewno (dlaczego?) ma nie więcej niż $k \cdot ([\log k] + 1)$ cyfr ($[\log k] + 1$ to liczba cyfr liczby $k$) i zdarza się, że ma dokładnie tyle (kiedy?), natomiast jest ich co najmniej tyle, ile wynosi część całkowita z $9 \cdot 10^{[\log k]-1} + 1$. Dlaczego? Są to oszacowania dość grube, ale dolne również jest przyjmowane. Dla jakich liczb?

Chętnie opublikujemy ulepszone lub uogólnione przez Czytelników podane tu wyniki.

## Zadania z artykułu *Podciągnij się z ciągów*

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

**1.** Gdyby taki ciąg istniał, istniałby też rosnący ciąg arytmetyczny, którego każdy wyraz jest kwadratem. Niech będzie to ciąg $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ o różnicy $r$. Wtedy $r = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)$. Ponieważ każda liczba ma tylko skończenie wiele rozkładów na czynniki, taka sytuacja jest niemożliwa.

**2.** Tak. Rozważmy ciąg $(a_n)$ określony wzorem $a_n = 4n+2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Jest to rosnący ciąg arytmetyczny liczb naturalnych o różnicy 4. Zauważmy, że $2 \mid 4n+2$. Gdyby wyraz $a_n$ był potęgą liczby naturalnej o wykładniku $k > 1$, to zachodziłaby podzielność $2^k \mid 4n+2 = 2(2n+1)$, skąd $2^{k-1} \mid 2n+1$. Jest to niemożliwe, gdyż liczba $2n+1$ jest nieparzysta.

**3.** Niech $n_k = \frac{(1+r)^k - 1}{r} a_1 + 1$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ Liczby $n_k$ są naturalne (dlaczego?). Mamy $a_{n_k} = a_1 + (n_k - 1)r = a_1 + \frac{(1+r)^k - 1}{r} a_1 r = a_1 + ((1+r)^k - 1)a_1 = a_1(1+r)^k$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczb $a_1$ i $1 + r$. Wówczas liczby $p_1, p_2, \ldots, p_s$ są również wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby $a_{n_k} = a_1(1+r)^k$ dla każdego $k$, czyli liczby $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ posiadają te same dzielniki pierwsze.

## Zadania z artykułu *Gwiazdy z gwiazd dwunastu (1)*

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

**1.** Nie, gdyż nie ogranicza jej sześcioodcinkowa łamana zamknięta.

**2.** Są dwa nieprzystające siedmiokąty gwiaździste i jeden ośmiokąt gwiaździsty.

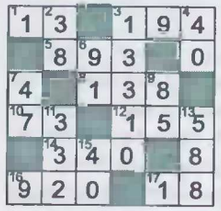
**3.** Oba dwunastościany gwiaździste mają po 30 krawędzi (każdą ze ścian odpowiedniego dwunastościanu wypukłego zastępujemy pięciokątem gwiaździstym i sklejamy ich boki parami).

**4.** Uwypukleniem dwunastościanu gwiaździstego małego (dgm) jest dwudziestościan foremny, a dwunastościanu gwiaździstego wielkiego (dgw) – dwunastościan foremny.

**5.** Ściany dgm zawierają się w płaszczyznach wyznaczonych przez ściany wyjściowego dwunastościanu foremnego, a płaszczyzny ścian dgw nie pokrywają się z płaszczyznami ścian wyjściowego dwudziestościanu foremnego.

## Zadania primaaprilisowe

s. 3. $100\text{ gr} = 10 \cdot 10\text{ gr} \neq 10\text{ gr} \cdot 10\text{ gr}$; s. 23. W rozumowaniu z układu dwóch równań uzyskano przez odejmowanie stronami jedno, a to nie jest przejście równoważne. s. 27. Pierwiastek z kwadratu liczby to jej moduł. s. 32. Pochodna po zmiennej naturalnej nie ma sensu; poza tym liczba składników z lewej strony jest też funkcją $x$, jest to więc funkcja złożona i trzeba by ją różniczkować inaczej.

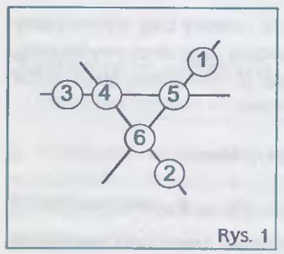


### Krzyżówka z pączkiem

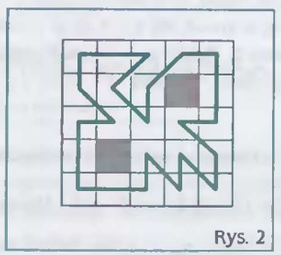
Lista nagrodzonych w następnym numerze.

## Zadania treningowe dla uczestników XVIII Międzynarodowych Mistrzostw i II Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych (zamieszczonych na wkładce do numeru 2/2004 MMM)

**1.** 8 cukierków. **2.** 240 zł. **3.** 3 oczka. **4.** Rys. 1. **5.** 61 : 49. **6.** 1,40 zł. **7.** Kwadrat mógł mieć pole 64 $cm^2$ lub $\frac{112}{3}$ $cm^2$ lub $\frac{224}{5}$ $cm^2$. **8.** Największa suma to 41. **9.** Jest tylko jedna trójka (13, 12, 57). **10.** Najdłuższa łamana ma długość $16 + 7\sqrt{2}$ cm. Przykład pokazany jest na rys. 2. **11.** 295. **12.** 60°. **13.** Prostopadłościan ma wymiary 4 cm × 5 cm × 6 cm, a pole czerwonej części powierzchni wynosi 60 $cm^2$. **14.** 8, 7, 6 i 5. **15.** Tak. Może rozłożyć liczbę 1367 na sumę 682 i 685 i skreślić 682, a także rozłożyć tę liczbę na sumę 683 i 684 i skreślić 683. **16.** 13, 19 i 22. **17.** 670338. **18.** $\frac{2003}{\pi} + 1$.



Rys. 1


Rys. 2

Wśród Czytelników, którzy do końca września 2004 nadeślą na adres redakcji prawidłowe rozwiązania zadań konkursowych, rozlosujemy nagrody. Decyduje data stempla pocztowego.

Główna nagroda (za rozwiązanie przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**,

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) – po **100 zł**,

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) – po **50 zł**.

**Kupon konkursowy**
„MMM" 3/2004

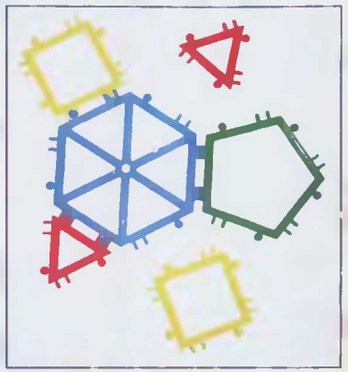
Na kopertę prosimy nakleić kupon konkursowy.

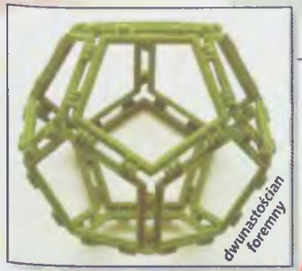
REKLAMA

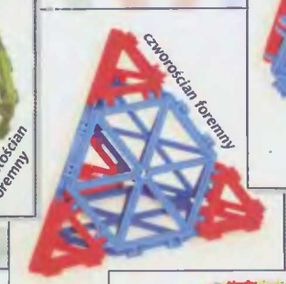
REKO SYSTEM

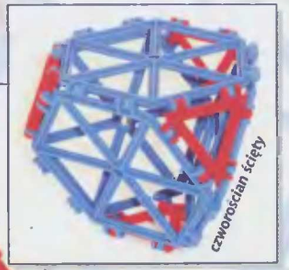
**Producent P.P.H.U. „REKO"**
**ul. Mechaniczna 2A**
**70-708 Szczecin**
**tel./faks (0-91) 46 06 450**
**tel./faks (0-91) 46 15 315**

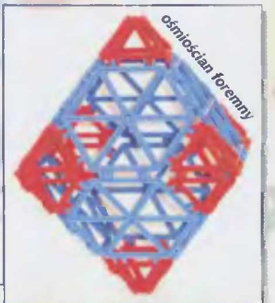
*Koniec kłopotów z wyobraźnią przestrzenną!*
*To łatwiejsze niż klejenie brył z kartonu!*
*Dzięki klockom systemu REKO z łatwością wykonasz modele wielościanów platońskich i archimedesowych oraz innych regularnych brył wypukłych i wklęsłych.*
*Możesz rozkładać je do siatek, a także łączyć w przestrzenne parkietaże. Możesz odkrywać własne ciekawe wielościenne kompozycje.*
*Komplet zawiera 180 klocków (trójkątnych, kwadratowych, pięciokątnych i sześciokątnych).*

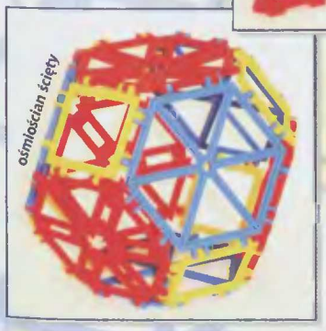


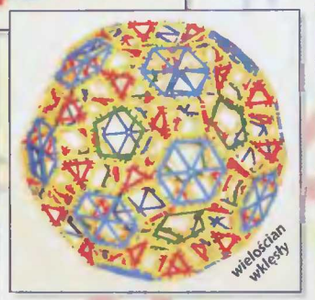


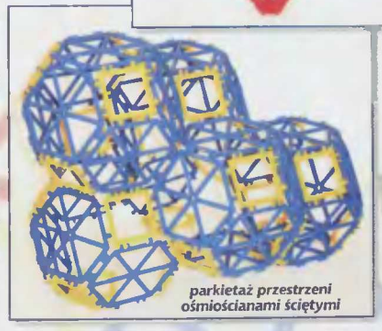



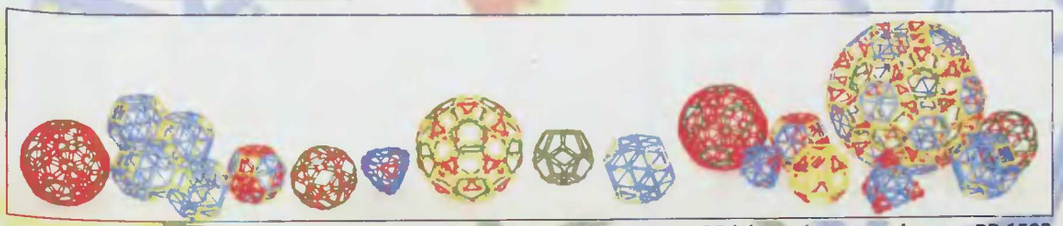



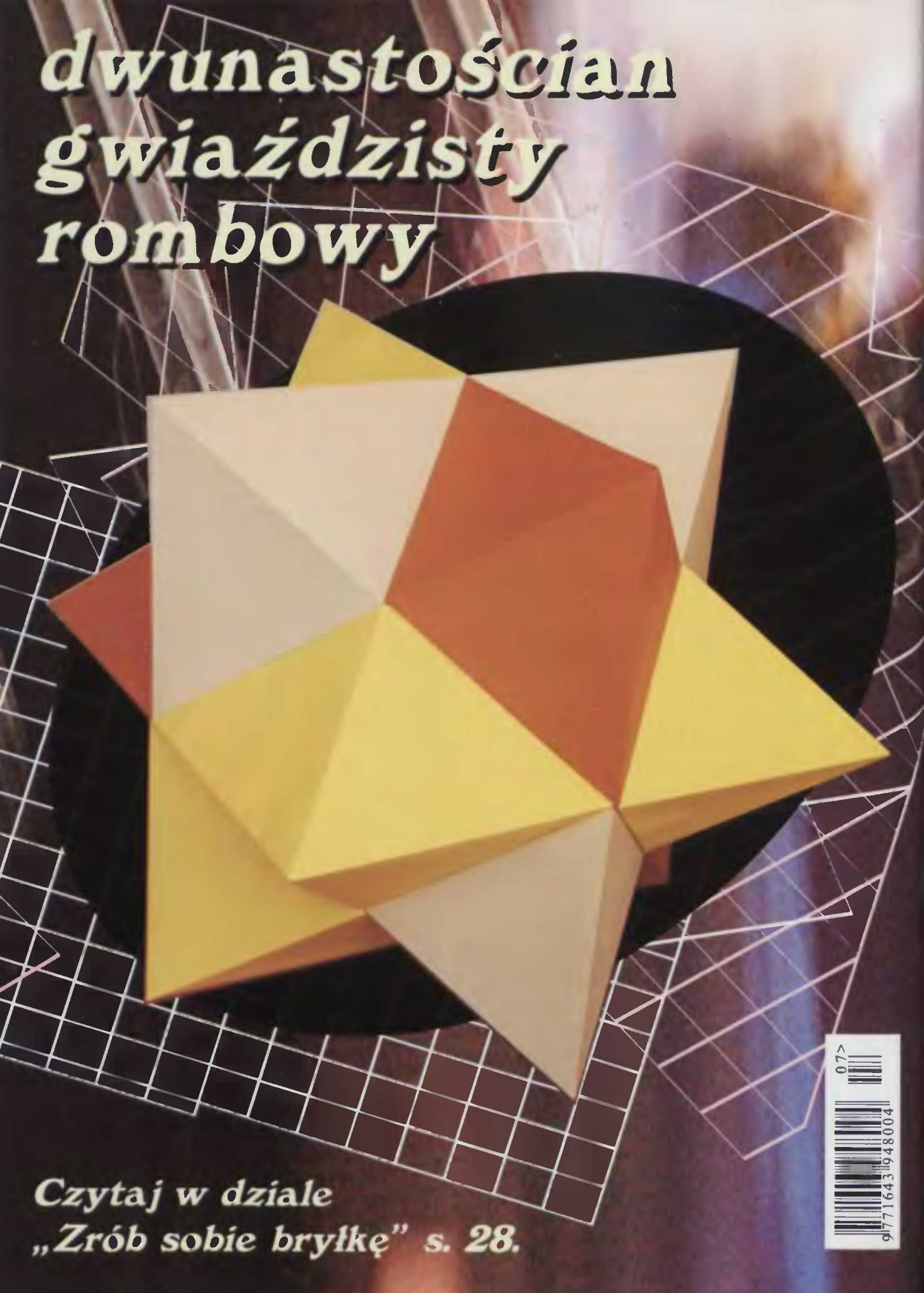



*Produkt chroniony przez Urząd Patentowy RP jako wzór przemysłowy nr RP 1503.*

# dwunastościan gwiaździsty rombowy



Czytaj w dziale
„Zrób sobie bryłkę" s. 28.

9 771643 948004 07